

مجموعه کتاب‌های آی کیو قرن جدید

• ویژه کنکور ۱۴۰۵ •



کنکور حسابان جامع

دهم | یازدهم | دوازدهم

مطابق با سبک جدید سؤالات کنکور

مؤلفان: مهندس سجاد عظیمی - مهندس مجید رفیعی
 علی احمدی قرزل دشت

+ کنکور
 ۱۴۰۴

مجموعه کتاب‌های فرمول بیست ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی



دکتر آئی کیو
DRIQ.com
کتابس آنلاین



گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین



گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین



مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به کوشش توان کرد گیتی روان به دانش توان یافت نیکو روان

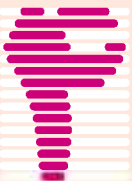
(فردوسی)

- حسابان، برای بسیاری از دانش‌آموزان، درسی چالش‌برانگیز اما سرنوشت‌ساز در مسیر کنکور ریاضی است. «حسابان جامع آپکو گاج» با هدف فراهم‌کردن یک مسیر روشن و مطمئن برای موفقیت در این درس طراحی شده‌است؛ رویکرد آن، ساده‌سازی مفاهیم دشوار، تقویت مهارت حل مسئله و ارائه پرسش‌هایی است که نه تنها سطح کنکور را پوشش می‌دهند، بلکه آفق یادگیری را گسترش می‌دهند.
- اگرچه مسیر موفقیت آسان نیست، اما با برنامه‌ریزی، پشتکار و تکیه بر منابع مناسب، رسیدن به درصد بالا در حسابان کاملاً ممکن است. کتابی که در دست شماست، نه فقط یک منبع کمک‌درسی، بلکه همراهی مطمئن برای مسیر پرچالش کنکور است.
- به شما اطمینان می‌دهیم، با بررسی دقیق تست‌های این کتاب، در کنکور ۱۴۰۵ و حتی بعد از آن، سوالی خارج از این کتاب و یا سخت‌تر از این سوالات نخواهید دید.
- امید است با تلاش مستمر و بهره‌گیری از این منبع، گام‌های استواری به سوی موفقیت بردارید.

برای اینکه بتوانی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های جنجالی	تست‌های چالشی	تست‌های قرمز	تست‌های آبی
			
این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سوالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.	بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و سخوای بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های IQ بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه. دقت کنید! تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.	تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.	در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبیه. تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.

 دام‌تستی طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنند که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون دام‌تستی براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.	 سروش سریع‌تر در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از سروش سریع‌تر سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.	 یه جوهره دیگه! طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنند و در کنکورهای جدید ارزش استفاده میکنند! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون  رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.	 هایلایت درسنامه‌های کاربردی درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب هایلایت کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جدول و کادر بندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.	 سرنخ تا جایی ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی فراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت سرنخ دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی.
--	--	---	--	--

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنم از اساتید عزیزی که در مراحل تالیف، همراه ما بودن به خصوص آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن. و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تالیف بشه.
- **اساتید:** معین کرمی، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، امید شیری‌نژاد، آرش عمید.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی - مجید رفعتی - علی احمدی

 sajad.azemati



مثلثات



درس اول: مقدمات و مفاهیم اولیه مثلثات

۵۴	۱۵	درجه و رادیان
۵۵	۱۶	نسبت‌های مثلثاتی مهم
۵۹	۱۷	دایره مثلثاتی
۶۱	۱۸	شیب خط و تانژانت

درس دوم: اتحادها و روابط مثلثاتی

۶۲	۱۹	روابط مثلثاتی مقدماتی
۶۴	۲۰	زاویه‌های متمم و مکمل
۶۴	۲۱	زاویه‌های ترکیبی ($\alpha \pm \beta, \pi \pm \alpha, \dots$)
۶۷	۲۲	روابط 2α
۷۱	۲۳	رابطه طلایی
۷۲	۲۴	کاربردها و نتایج روابط 2α
۷۴	۲۵	نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$

درس سوم: توابع متناوب و نمودار ...

۸۰

درس چهارم: معادلات مثلثاتی

۹۰	۲۶	حل معادلات مثلثاتی با کمک روابط 2α
۹۱	۲۷	حل معادلات مثلثاتی شامل کمان‌های $\alpha \pm \beta$
۹۲	۲۸	دسته‌بندی و فاکتورگیری
۹۲	۲۹	معادلات مثلثاتی کسری
۹۴	۳۰	مسائل ترکیبی و خواسته‌های خاص

۳۷۰

پاسخ‌نامه تشریحی



حد، پیوستگی و مجانب



درس اول: مفاهیم اولیه و محاسبه حد توابع

۹۶	۳۱	همسایگی
۹۷	۳۲	فرآیندهای حدی
۱۰۰	۳۳	قضایای حد
۱۰۳	۳۴	ابهام $\frac{0}{0}$
۱۱۰	۳۵	حد مثلثاتی

درس دوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۱۱۴	۳۶	حد بی‌نهایت
۱۱۸	۳۷	حد در بی‌نهایت

درس سوم: مجانب‌های قائم و افقی تابع

۱۲۴	۳۸	مجانب قائم
۱۲۷	۳۹	یافتن مجانب افقی
۱۲۸	۴۰	سؤالات ترکیبی مجانب قائم و افقی

درس چهارم: پیوستگی

۱۳۱	۴۱	مفهوم پیوستگی
۱۳۶	۴۲	نقطه مرزی خاص
۱۳۷	۴۳	پیوستگی در بازه

۴۳۳

پاسخ‌نامه تشریحی



فهرست

تابع



درس اول: مفاهیم تابع

۱۰	۱	شناسایی تابع
۱۱	۲	مقدار تابع
۱۲	۳	دامنه و برد تابع
۱۶	۴	تساوی دو تابع

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع

۱۷	۵	انتقال و قرینه‌یابی
۲۱	۶	انبساط و انقباض نمودار

درس سوم: انواع تابع

۲۳	۲۷	۲۸
----	----	----

درس چهارم: توابع صعودی و نزولی

درس پنجم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

۳۴	۷	مقداردهی به ترکیب توابع
۳۵	۸	ضابطه ترکیب توابع
۳۸	۹	دامنه و بُرد ترکیب توابع
۳۹	۱۰	وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

درس ششم: تابع یک‌به‌یک و تابع وارون

۴۲	۱۱	تابع وارون
۴۴	۱۲	محاسبه ضابطه تابع وارون
۴۷	۱۳	برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g
۴۸	۱۴	ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

درس هفتم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

۵۰	۳۱۲	پاسخ‌نامه تشریحی
----	-----	------------------



معادله و تابع درجه دوم

درس اول: معادله درجه دوم

۶۳	مجموع ریشه‌ها، حاصل ضرب ریشه‌ها و ...
۶۴	علامت ریشه‌ها
۶۵	نوشتن معادله درجه دوم
۶۶	معادلات قابل تبدیل به درجه دوم

درس دوم: سهمی و ویژگی‌های آن

۶۷	ویژگی‌های سهمی
۶۸	بررسی سهمی
۶۹	نوشتن معادله سهمی
۷۰	وضعیت سهمی و خط یا وضعیت دو سهمی نسبت به هم
۷۱	گذر از نواحی

پاسخ‌نامه تشریحی ۵۹۸

قدرمطلق و براکت

درس اول: قدرمطلق

۷۲	تعریف و ویژگی‌های قدرمطلق
۷۳	معادلات قدرمطلق
۷۴	نامعادلات قدرمطلق
۷۵	نمودارهای قدرمطلق

درس دوم: جزء صحیح

۷۶	تعریف و ویژگی‌ها
۷۷	معادله و نامعادله شامل جزء صحیح
۷۸	نمودار توابع شامل جزء صحیح

پاسخ‌نامه تشریحی ۶۲۴

توان گویا و عبارت جبری

درس اول: توان گویا و عبارت جبری

۷۹	ریشه و توان
۸۰	مقایسه مقادیر تقریبی ریشه n ام
۸۱	اعداد با توان گویا
۸۲	قوانین رادیکال‌ها

درس دوم: عبارت‌های جبری

۸۳	اتحادها
۸۴	ساده کردن عبارات رادیکالی
۸۵	گویا کردن

پاسخ‌نامه تشریحی ۶۳۹

مشتق

درس اول: مفهوم هندسی مشتق و ...

درس دوم: تابع مشتق و قوانین محاسبه مشتق

۱۴۴	قواعد مشتق‌گیری
۱۴۵	تکنیک‌های مشتق‌گیری
۱۴۶	مشتق تابع مرکب
۱۵۰	مشتق مرتبه دوم
۱۵۱	تعریف مشتق با ظاهری متفاوت!
۱۵۲	مشتق توابع مثلثاتی
۱۵۷	معادله خط مماس

درس سوم: مشتق چپ و راست و مشتق‌پذیری

۱۶۱	مشتق توابع چند ضابطه‌ای
۱۶۳	مشتق توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح
۱۶۴	نقاط مشتق ناپذیر، دامنه تابع مشتق و مشتق‌پذیری ...
۱۶۷	نمودار تابع مشتق

درس چهارم: آهنگ تغییر

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۹۲

کاربرد مشتق

درس اول: نقاط بحرانی و اکسترم‌های تابع

۱۷۴	ارتباط یکنوایی تابع با مشتق آن
۱۷۶	نقاط بحرانی
۱۷۸	اکسترم‌های نسبی تابع
۱۸۲	اکسترم‌های مطلق

درس دوم: بهینه‌سازی

درس سوم: جهت تقعر، نقطه عطف و رسم نمودار تابع

۱۹۱	جهت تقعر تابع
۱۹۳	نقطه عطف
۱۹۶	نمودارشناسی
۲۰۳	ارتباط نمودارهای f' و f''

پاسخ‌نامه تشریحی ۵۴۴

مجموعه، الگو و دنباله



درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲۸۰	مجموعه‌های اعداد	۱۰۵
۲۸۰	بازه‌ها	۱۰۶
۲۸۲	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۱۰۷
۲۸۲	متمم یک مجموعه و مجموعه مرجع	۱۰۸
۲۸۳	قوانین مجموعه‌ها	۱۰۹
۲۸۵	محاسبه تعداد اعضای مجموعه‌ها	۱۱۰

درس دوم: الگو و دنباله

۲۸۷	دنباله خطی و درجه ۲	۱۱۱
۲۸۹	چند دنباله خاص (دنباله بازگشتی، فیبوناچی و ...)	۱۱۲

درس سوم: دنباله‌های حسابی و هندسی

۲۹۱	دنباله حسابی	۱۱۳
۲۹۴	مجموع جملات دنباله حسابی	۱۱۴
۲۹۶	دنباله هندسی	۱۱۵
۲۹۹	مجموع جملات دنباله هندسی	۱۱۶

۶۹۸

پاسخ‌نامه تشریحی



معادله و نامعادله



درس اول: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۲۴۸	معادلات گویا	۸۶
۲۵۰	مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی	۸۷
۲۵۱	معادلات گنگ	۸۸

درس دوم: نامعادلات و تعیین علامت

۲۵۴	تعیین علامت	۸۹
۲۵۵	حل نامعادله	۹۰
۲۵۷	وضعیت دو منحنی	۹۱

۶۵۶

پاسخ‌نامه تشریحی



هندسه تحلیلی



هندسه مختصات (تحلیلی)

۳۰۲	معادله خط	۱۱۷
۳۰۴	فاصله دو نقطه	۱۱۸
۳۰۸	فاصله نقطه از خط	۱۱۹
۳۱۰	فاصله دو خط موازی	۱۲۰

۷۲۸

پاسخ‌نامه تشریحی



تابع نمایی و لگاریتمی



درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن

۲۶۰	تابع نمایی	۹۲
۲۶۰	معادلات و نامعادلات تابع نمایی	۹۳
۲۶۲	نمودارهای توابع نمایی	۹۴

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

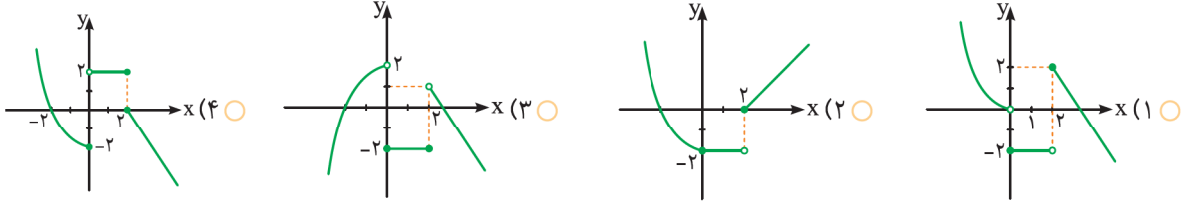
۲۶۶	مفهوم لگاریتم	۹۵
۲۶۷	قوانین لگاریتم	۹۶
۲۷۱	دامنه توابع لگاریتمی	۹۷
۲۷۲	نمودار تابع لگاریتمی	۹۸
۲۷۴	معادلات لگاریتمی	۹۹
۲۷۶	نامعادله لگاریتمی	۱۰۰
۲۷۶	حل معادلات نمایی به کمک لگاریتم	۱۰۱
۲۷۷	ضابطه وارون تابع نمایی و لگاریتمی	۱۰۲
۲۷۷	کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی	۱۰۳
۲۷۸	ترکیبی‌های لگاریتم	۱۰۴

۶۷۲

پاسخ‌نامه تشریحی



۲۳۷ اگر $g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ 1-x & ; 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} -2 & ; x < 0 \\ x-3 & ; x \geq 0 \end{cases}$ باشد، نمودار تابع $(f+g)(x)$ کدام است؟



مقداردهی به ترکیب توابع

۲۳۸ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ باشد، عدد a کدام است؟ $g(f(a)) = 5$

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۳۹ اگر $f = \{(0, 3), (2, -2), (4, 1)\}$ و $g = \{(-1, 4), (2, 3), (4, 2)\}$ باشند، تابع $f \circ g + fog$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $\{(-1, 3)\}$ ☐ ۲ (۲) ☐ $\{(2, 4), (-1, 5)\}$ ☐ ۳ (۳) ☐ $\{(4, 0)\}$ ☐ ۴ (۴) ☐ $\{(-1, 3), (4, 0)\}$ ☐

۲۴۰ توابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 2) \in fog$ و $(4, 1) \in g \circ f$ ، آن گاه

(ریاضی داخل ۹۰)

دوتایی (a, b) کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(3, 4)$ ☐ ۲ (۲) ☐ $(4, 5)$ ☐ ۳ (۳) ☐ $(4, 3)$ ☐ ۴ (۴) ☐ $(5, 4)$ ☐

۲۴۱ اگر $f(x) = |x-1| + |2x+1|$ و $g(x) = [-x+1]$ باشند، $g(f(\sqrt{3}-1))$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۲ ☐ ۲ (۲) ☐ -۳ ☐ ۳ (۳) ☐ ۱ ☐ ۴ (۴) ☐ ۲ ☐

۲۴۲ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آن گاه $(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $4(1-\sqrt{2})$ ☐ ۲ (۲) ☐ $4(\sqrt{2}-1)$ ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ ☐ $2\sqrt{2}$ ☐ ۴ (۴) ☐

۲۴۳ در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ ، مقدار $f(-\frac{1}{4}f(x))$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۱ ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ ☐ ۳ (۳) ☐ ۰ ☐ ۴ (۴) ☐ تعریف نشده ☐

(داخل ۱۴۰۲)

۲۴۴ اگر $f(x) = 2|x| - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۴ ☐ -۴ ☐ ۲ (۲) ☐ -۶ ☐ ۳ (۳) ☐ ۶ ☐ ۴ (۴) ☐

۲۴۵ اگر خروجی ماشین مقابل برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟



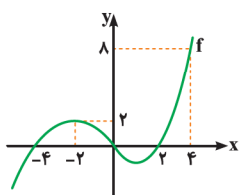
- ۱ (۱) ☐ $\frac{11}{9}$ ☐ ۲ (۲) ☐ $\frac{7}{2}$ ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ ☐ ۴ ☐

(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۴)

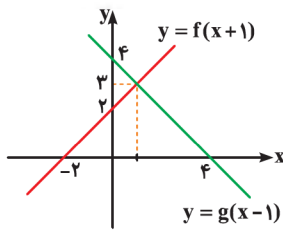
۲۴۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ باشد، معادله $f \circ f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۴۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $g(x) = 6 - f(x-3)$ باشد، مقدار $(fog)(1)$ کدام است؟



- ۱ (۱) ☐ ۴ ☐ ۲ (۲) ☐ ۶ ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ ☐ ۴ (۴) ☐ ۸ ☐



۲۴۸ نمودار دو تابع $y = f(x+1)$ و $y = g(x-1)$ به صورت مقابل است. مقدار $(g \circ f)(3) + (f \circ g)(-3)$ کدام است؟

- ۵ (۱) ☐
۶ (۲) ☐
۷ (۳) ☐
۸ (۴) ☐

۲۴۹ تابع های $f = \{(a, -2), (-1, b), (1, 0), (3, -4)\}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ مفروض اند. اگر برد تابع $g \circ f$ به صورت $\{-1, c, 1, d\}$ باشد، مقدار bc کدام است؟

- ۱۰ (۴) ☐ ۶ (۳) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۴ (۱) ☐

۲۵۰ اگر $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 1$ و $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ و $f(2) = 1$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- ۸ (۴) ☐ ۷ (۳) ☐ ۶ (۲) ☐ ۵ (۱) ☐

۲۵۱ iq اگر $f(x+1) = 2x+1$ و $f(g(x)+x) = 6x+1$ باشد، مقدار $(f \circ g)(3)$ کدام است؟

- ۱۵ (۴) ☐ ۱۳ (۳) ☐ ۱۱ (۲) ☐ ۹ (۱) ☐

۲۵۲ iq اگر $f(x) = \begin{cases} x^2+1; & x < 2 \\ 3x-4; & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} f(x+1); & x < 1 \\ f(x-1); & x \geq 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $(f \circ g)(1)$ کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

ضابطه ترکیب توابع

در این بخش، می‌خواهیم با کمک تابع های f و g ، ضابطه تابع $f \circ g$ یا $g \circ f$ رو پیدا کنیم.

۲۵۳ اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- ۲ - f(x) (۴) ☐ f(x) (۳) ☐ ۴ - x (۲) ☐ x (۱) ☐

۲۵۴ اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x - 3$ و α و β ریشه های معادله $(g \circ f)(x) = 2$ باشند، مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

- ۲ (۴) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۱۴ (۲) ☐ ۸ (۱) ☐

(داخل ۹۶)

۲۵۵ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، آنگاه ضابطه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۲x (۴) ☐ x (۳) ☐ x+1 (۲) ☐ x-1 (۱) ☐

۲۵۶ اگر $f(x) = 2(x^2 - x - 3)$ و $g(x) = 3x+1$ باشند، نمودار دو تابع $f \circ g$ و $f(x+3)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

- ۴ غیرمتقاطع (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

۲۵۷ در تابع خطی f اگر $(f \circ f)(x) = f(x-3) + f(x+1)$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۸ (۴) ☐ ۷ (۳) ☐ ۶ (۲) ☐ ۵ (۱) ☐

(خارج ۹۷)

۲۵۸ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

- ۱, ۷ (۴) ☐ -۱, ۷ (۳) ☐ ۱, -۷ (۲) ☐ -۱, -۷ (۱) ☐

۲۵۹ اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{3}(x-3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی $f \circ g$ که در زیر محور x ها قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟

- (۱, ۵) (۲) ☐ (-۱, ۵) (۳) ☐ (-۲, ۱) (۴) ☐ (۱, ۵) (۹۱) ☐

۲۶۰ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + 2x + 4$ باشند، مجموعه جواب معادله $(g \circ f)(x) = 3$ کدام است؟

- $\emptyset$ (۴) ☐ $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳) ☐ $\mathbb{Z}$ (۲) ☐ $\mathbb{R}$ (۱) ☐

۲۶۱ اگر $f(x) = x^2 - 7x + 10$ و $g(x) = [x]$ باشد، نمودار تابع $f \circ g$ در بازه $[a, b]$ زیر محور x ها است. بیش ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۲ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۲) ☐ ۵ (۱) ☐

۲۶۲ اگر $f(x) = |x-3|$ و $g(x) = |2x-7|$ باشند، مجموع جواب های معادله $(g \circ f)(x) = 1$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ☐ ۱۹ (۳) ☐ ۱۳ (۲) ☐ ۶ (۱) ☐

۲۶۳ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟ (داخل ۹۵)

۳ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۴/۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۲۶۴ تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟ (خارج ۹۴)

۱/۴ (۱) ☐ ۱/۹ (۲) ☐ ۴/۹ (۳) ☐ ۴/۹ (۴) ☐

۲۶۵ نمودار تابع g محور x ها را در نقاطی به طول ۱ و $2\sqrt{2}$ قطع می کند. اگر $f(x) = x\sqrt{x}$ باشد، اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g \circ f$ محور x ها را قطع می کند، کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

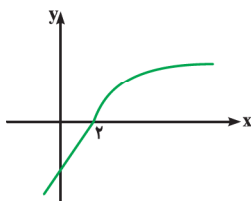
۱ (۱) ☐ ۱/۲ (۲) ☐ $\sqrt{2}$ (۳) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ☐

۲۶۶ توابع $f(x) = \begin{cases} 3x-12; & x \geq 3 \\ x^2-1; & x < 3 \end{cases}$ و $g(x) = 2x+1$ را در نظر بگیرید. مجموع ریشه های معادله $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟

۱ (۱) ☐ ۱/۲ (۲) ☐ ۵/۳ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

۲۶۷ اگر $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

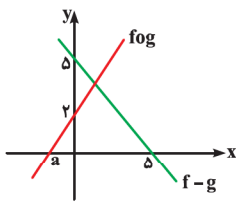


۲۶۸ اگر $f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 - x$ باشد، نمودار دو تابع $y = fog$ و $y = x - f(x)$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (شبه سازه تجربی ۱۴۰۰)

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۶۹ نمودار دو تابع $f - g$ و $f \circ g$ به صورت مقابل است. اگر $2g(x) = 3f(x) - 14$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱ (۱) ☐ ۱/۳ (۲) ☐ ۲/۳ (۳) ☐ ۱/۳ (۴) ☐



بعضی وقتها هم تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ می خوانیم ضابطه f رو پیدا کنیم. انواع این سؤالات براتون آوردیم.

۲۷۰ اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(fog)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۱)

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۱ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۲ اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (داخل ۹۷)

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۳ اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۴ اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(fog)(x) = (2x+1)g(x) + 6x$ باشد، معادله محور تقارن تابع $y = f(x)$ کدام است؟

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۵ اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۶ اگر $(g \circ f)(x) = 3f(x) + 4$ و $(fog)(x) = 2g^2(x) + g(x) + 1$ باشد، کمترین مقدار تابع $(f-g)(x)$ کدام است؟

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۷ اگر $f(x) = 2x^2 + x$ و $(g \circ f)(x) = 6 - 3x - 6x^2$ باشد، نمودار تابع $y = g(x)$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- اول (۱) ☐ دوم (۲) ☐ سوم (۳) ☐ چهارم (۴) ☐



۲۷۸ نمودار تابع درجه دوم $f \circ g$ و تابع خطی g به صورت مقابل است. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد تابع $y = f(x)$ درست است؟

الف) محور x ها را در دو نقطه با طول مثبت قطع می‌کند.

ب) فقط از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد.

پ) بیش‌ترین مقدار آن برابر ۱ است.

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

(شبیه‌ساز تجربی ۹۷ و ۱۴۰۱)

۲۷۹ اگر $f(x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$ باشد، ضابطه تابع $y = f(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $2x^2 + 5$ ☐ ۲ (۲) $x^2 + 5$ ☐ ۳ (۳) $x^2 + 5x$ ☐ ۴ (۴) $-x^2 + 5$ ☐

۲۸۰ اگر $f\left(\frac{x^2 - 2}{x}\right) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$ باشد، ضابطه $y = f(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $x^2 - \frac{2}{x}$ ☐ ۲ (۲) $x^2 + \frac{2}{x}$ ☐ ۳ (۳) $x^2 - x$ ☐ ۴ (۴) $x^2 + x$ ☐

توی سؤالی زیر تابع‌های f و g رو داریم و می‌خواهیم ضابطه g رو پیدا کنیم.

۲۸۱ دو تابع $f(x) = \frac{x+a}{x-1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{5x-2}{3x+1}$ را در نظر بگیرید. اگر $g(1) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

(تجربی خارج ۹۱)

۲۸۲ با توجه به ماشین شکل مقابل، اگر $g(x) = 3x + 4$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐



۲۸۳ اگر $f(x) = 4x^2 + 16x + 18$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 3$ باشد، ضابطه تابع خطی g با شیب منفی کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{2}x + 1$ ☐ ۲ (۲) $-x + \frac{5}{2}$ ☐ ۳ (۳) $-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ ☐ ۴ (۴) $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ☐

۲۸۴ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x+1}$ باشد، تابع $g(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{x+1}{2}$ ☐ ۲ (۲) $\frac{x-1}{2}$ ☐ ۳ (۳) $\frac{2x+1}{2}$ ☐ ۴ (۴) $\frac{2x-1}{2}$ ☐

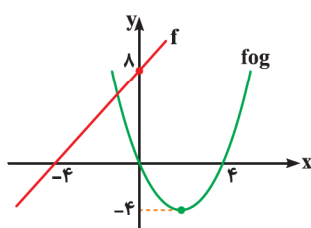
(تجربی خارج ۹۰)

۲۸۵ اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن‌گاه $(f + g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) $x^2 - 1$ ☐ ۲ (۲) $x^2 + 1$ ☐ ۳ (۳) $x^2 - 2x$ ☐ ۴ (۴) $x^2 + 2x$ ☐

۲۸۶ اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f \circ f(x) = 4x - 3$ و $f \circ g(x) = x^2 - x + 3$ باشند، بیشترین مقدار تابع $y = g(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{4}$ ☐ ۲ (۲) $\frac{1}{8}$ ☐ ۳ (۳) $\frac{1}{6}$ ☐ ۴ (۴) $\frac{1}{2}$ ☐



۲۸۷ نمودار تابع خطی f و تابع درجه دوم $f \circ g$ به صورت مقابل است. معادله محور تقارن تابع g کدام است؟

- ۱ (۱) $x = -1$ ☐ ۲ (۲) $x = 1$ ☐ ۳ (۳) $x = -2$ ☐ ۴ (۴) $x = 2$ ☐

دامنه و بُرد، ترکیب توابع

توی سؤالاتی دامنه تابع مرکب، خواستون به استفاده از گزینه‌ها باشه. ولی اگر سوال جوری طرح بشه که مجبور بشید دامنه رو پیدا کنید، لازمه اول دامنه تابع f و g رو جداگانه حساب کنید.

۲۸۸ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3x-4}{x+2}$ و دامنه تابع $f \circ g$ برابر $\mathbb{R} - \{a, b\}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $\frac{1}{2}$ (۲) ☐ $\frac{3}{4}$ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

۲۸۹ اگر $f(x) = \sqrt{5-x}$ و $g(x) = x^2 + 4x$ باشند و دامنه تابع $f \circ g$ به صورت بازه $[a, b]$ باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۳ (۲) ☐ -۵ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐ ۵

(داخل ۹۶)

۲۹۰ اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(0, 1)$ (۲) ☐ $\{0\}$ (۳) ☐ $(-1, 1)$ (۴) ☐ $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

۲۹۱ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (۲) ☐ $\mathbb{R} - \{0, 8\}$ (۳) ☐ $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) ☐ $(0, +\infty)$

۲۹۲ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_p(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $[-2, 4]$ (۲) ☐ $[-2, 0]$ (۳) ☐ $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) ☐ $[-4, -2) \cup (0, 2]$

(خارج ۹۴)

۲۹۳ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ (۲) ☐ $(\frac{1}{4}, +\infty)$ (۳) ☐ $(-2, 0)$ (۴) ☐ $(-1, \frac{1}{4})$

۲۹۴ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x) = \tan x; |x| < \frac{\pi}{4}$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

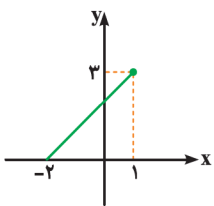
- ۱ (۱) ☐ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (۲) ☐ $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (۳) ☐ $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4})$ (۴) ☐ $[-1, 1]$

۲۹۵ اگر $f(2x+1) = 3x-2$ و $g(x) = 4x-3$ باشد، آنگاه دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $[-1, 3]$ (۲) ☐ $(\frac{5}{3}, \frac{5}{4})$ (۳) ☐ $(\frac{1}{4}, \frac{5}{3})$ (۴) ☐ $(\frac{5}{3}, \frac{13}{3})$

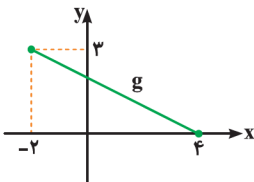
۲۹۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = (f \circ f)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ بی شمار (۴) ☐



۲۹۷ اگر $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ و نمودار تابع g به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $f \circ g$ شامل چند عدد صحیح است؟

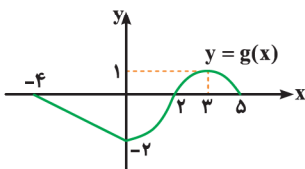
- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐ ۷



سؤالات زیر مربوط به بُرد تابع $f \circ g$ هستن. برای حل این سؤالا، حتماً به نمودار تابع f (تابع بیرونی) توجه کنید.

۲۹۸ تابع f با دامنه $[0, 3]$ و بُرد $[-2, 2]$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع g به صورت زیر باشد، بُرد تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐



(داخل ۹۹)

۳۹۹ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع gof کدام است؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(0, 4)$ (۴) $(1, 4)$

(خارج ۹۹)

۳۰۰ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، بُرد تابع gof ، کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۳۰۱ iq دو تابع $f(x) = \log_2 x$ و $g(x) = \lambda x - x^2$ را در نظر بگیرید. اگر مجموعه A و B به ترتیب دامنه و بُرد تابع fog باشند، مجموعه $A \cap B$ دارای چند عضو صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۰۲ iq بُرد تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 x)$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(0, \frac{1}{2})$ (۴) $(0, 1]$

۳۰۳ اگر $f(x) = |2x - 3| + 1$ و $g(x) = 1 + 2\sin^2 x$ باشند، بُرد تابع fog کدام است؟

- (۱) $[2, 4]$ (۲) $[1, 3]$ (۳) $[1, 4]$ (۴) $[0, 3]$

۳۰۴ iq اگر $f(x) = \log_2 x + \log_2 y$ و $g(x) = 3^{x+1}$ باشد، بُرد تابع gof کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(0, 3] \cup [27, +\infty)$ (۳) $(0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ (۴) $(0, \frac{1}{3}] \cup [27, +\infty)$

وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

۳۰۵ اگر $f = \{(1, 3), (2, -1), (3, 0), (0, 1)\}$ و $g = \{(-1, 4), (0, 1), (3, 2)\}$ باشند، چه تعداد از توابع زیر غیریکنوا هستند؟

- الف fog ب fof پ gof
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۰۶ اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $[-6, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{x}{\sqrt{f(x+2)} - f(3-2x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۰۷ iq اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{2x+5}{\sqrt{f(4-x)} - f(|x-2|)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۰۸ iq تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار

(ریاضی داخل ۱۴۰۲)

صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۰۹ iq اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی با دامنه $[-4, 5]$ باشد، دامنه تابع $y = \log(f(x+1) - f(2-x))$ کدام است؟

- (۱) $(0, 5, 6]$ (۲) $(-4, 0, 5)$ (۳) $(0, 5, 5]$ (۴) $(-3, 0, 5)$

۳۱۰ نمودار تابع اکیداً صعودی $y = f(x)$ از نقطه $A(6, 3)$ می‌گذرد. اگر $g(x) = x^2 - x$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(\text{fog})(x) \leq 3$ شامل

(شبه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۶

۳۱۱ iq تابع اکیداً نزولی $y = f(x)$ با دامنه $[0, 4]$ و بُرد $[1, 4]$ را در نظر بگیرید. اگر $f(2) = 3$ و $f^{-1}(2) = 3$ باشد، مجموعه جواب نامعادله

(شبه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

$2 \leq (\text{fof})(x) \leq 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(شبه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

۳۱۲ TNT اگر $f(x) = x + \sqrt{x} - 2$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $\text{fof}(x) \leq f(\sqrt{x})$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

فصل اول

درس ششم:

تابع یک به یک و تابع وارون

۱

CHAPTER 1

شرح مقدمه بخش وارون تابع، شناسایی یک به یکی توابع است.

 ۳۱۳ اگر رابطه $f = \{(1, 4), (4, 5), (1, a^2 + 3a), (b, |2a + 3|)\}$ نمایش دهنده یک تابع یک به یک باشد، مقدار $b + a$ کدام می تواند باشد؟

- ۶ (۱) ☐ ۹ (۲) ☐ ۵ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۱۴ کدام یک از نمودارهای زیر، نمایش تابعی یک به یک است؟



۳۱۵ کدام جمله صحیح است؟

- (۱) جمع دو تابع یک به یک، قطعاً تابعی یک به یک است.
 (۲) تابع با دامنه ۳ عضوی و برد ۲ عضوی، قطعاً غیر یک به یک است.
 (۳) اگر f تابعی یک به یک باشد، f^K ، $(K \in \mathbb{N})$ نیز تابعی یک به یک است.
 (۴) اگر $|f|$ تابعی یک به یک باشد، f می تواند یک به یک نباشد.

۳۱۶ کدام تابع زیر یک به یک است؟

- $y = 2|x| - x$ (۴) ☐ $y = |2x| - 2x$ (۳) ☐ $y = |x| + 2x$ (۲) ☐ $y = |2x| + x$ (۱) ☐

۳۱۷ کدام تابع زیر یک به یک است؟

- $y = [x + [x]]$ (۴) ☐ $y = x[x]$ (۳) ☐ $y = x + [x]$ (۲) ☐ $y = x - [x]$ (۱) ☐

۳۱۸ کدام تابع زیر یک به یک است؟

- $y = \sqrt{|x| - 2}$ (۴) ☐ $y = |\sqrt{x} - 2|$ (۳) ☐ $y = x^2 + 2x$ (۲) ☐ $y = x^2 + 2x$ (۱) ☐

۳۱۹ کدام تابع غیر یک به یک است؟

- $y = (\frac{2}{x})^x$ (۴) ☐ $x + y + 1 = 0$ (۳) ☐ $y = \sqrt[3]{x - 5}$ (۲) ☐ $y = x^2 - 4x + 1$ (۱) ☐

(فصل ۹.۵)

 ۳۲۰ تابع $y = |x^2|$ چگونه است؟

- (۱) نزولی ☐ (۲) صعودی ☐ (۳) غیر یک به یک ☐ (۴) یک به یک ☐

۳۲۱ کدام تابع زیر یک به یک نیست؟

- $y = \sqrt{x} + x^2$ (۴) ☐ $y = \log x + x^2$ (۳) ☐ $y = x + (\frac{1}{x})^x$ (۲) ☐ $y = \sqrt[3]{x} + x$ (۱) ☐

 ۳۲۲ اگر $f(x) = m^2x^2 + 2x - x^2 + m$ تابعی همواره یک به یک باشد، حداکثر مقدار $f(3/5)$ کدام است؟

- ۶ (۱) ☐ ۷ (۲) ☐ ۸ (۳) ☐ ۹ (۴) ☐

۳۳۳ iq تابع $f(x) = ax^2 - (a+2)x + 3 - a$ در بازه $(-2, -1)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟

- ☐ (۱) $R - (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$
☐ (۲) $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$
☐ (۳) $[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}]$
☐ (۴) $R - [-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}]$

۳۳۴ به ازای کدام مقدار b ، تابع $y = \frac{2x+b}{x+3+b}$ غیر یک به یک است؟

- ☐ (۱) -3
☐ (۲) -6
☐ (۳) -4
☐ (۴) -1

۳۳۵ اگر تابع $f(x) = 2x + m^2x - 3mx + 1$ همواره غیر یک به یک باشد، m کدام می تواند باشد؟

- ☐ (۱) -1
☐ (۲) $+2$
☐ (۳) $+3$
☐ (۴) -4

۳۳۶ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ x+a & ; x < 1 \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد، a چند مقدار طبیعی می تواند داشته باشد؟

- ☐ (۱) 1
☐ (۲) 2
☐ (۳) 3
☐ (۴) صفر

۳۳۷ اگر $g(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & ; x > 2 \\ \sqrt{x-a} & ; a \leq x \leq 2 \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

- ☐ (۱) -5
☐ (۲) -4
☐ (۳) -7
☐ (۴) -6

۳۳۸ به ازای کدام مقادیر k تابع $f(x) = \begin{cases} 4x+1 & x > k \\ x-5 & x \leq k \end{cases}$ یک به یک نیست؟

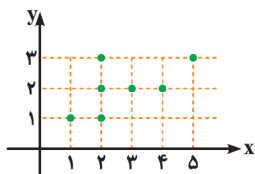
- ☐ (۱) $[1, 2]$
☐ (۲) $(-\infty, -2)$
☐ (۳) $(3, 4]$
☐ (۴) $[0, 1]$

۳۳۹ iq تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-b} & ; b \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x+a} & ; x > 0 \end{cases}$ یک به یک است. کدام یک می تواند (a, b) باشد؟

- ☐ (۱) $(2, -4)$
☐ (۲) $(4, 2)$
☐ (۳) $(-2, 4)$
☐ (۴) $(-2, -4)$

۳۴۰ سریع ممکنه تابعی یک به یک نباشه، اما با محدود کردن دامنه بشه ارزش تابعی یک به یک ساخت.

۳۴۱ با حذف حداقل چند نقطه از نمودار مقابل یک تابع یک به یک خواهیم داشت؟



- ☐ (۱) 1
☐ (۲) 2
☐ (۳) 3
☐ (۴) 4

۳۴۱ دامنه تابع $f(x) = 2x^2 - 16x + \sqrt{x}$ را به کدام بازه زیر محدود کنیم تا تابعی یک به یک داشته باشیم؟

- ☐ (۱) $[-6, 6]$
☐ (۲) $(-\infty, 5]$
☐ (۳) $(3, 6]$
☐ (۴) $(5, +\infty)$

۳۴۲ تابع $f(x) = (2x+1)^2 + 2(3x-1) - 3$ در بازه $(-\infty, m]$ یک به یک است. بیشترین مقدار m کدام است؟

- ☐ (۱) $-1/5$
☐ (۲) $-1/25$
☐ (۳) -1
☐ (۴) $-1/75$

۳۴۳ تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{\pi})$ در کدام دامنه زیر یک به یک است؟

- ☐ (۱) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
☐ (۲) $(0, 2\pi)$
☐ (۳) $(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$
☐ (۴) $(0, \pi)$

۳۴۴ تابع $f(x) = |x^2 - 1| - 1$ با کدام دامنه زیر یک به یک است؟

- ☐ (۱) $[-1, 1]$
☐ (۲) $[-\sqrt{2}, -1]$
☐ (۳) $[0, \sqrt{2}]$
☐ (۴) $[1, +\infty)$

۳۴۵ بازه $[a, b]$ بزرگترین بازه ای است که تابع $f(x) = |2x-4| + |2x| + 1$ در آن یک به یک نیست. این بازه شامل چند عدد صحیح است؟

- ☐ (۱) 1
☐ (۲) 2
☐ (۳) 3
☐ (۴) صفر

۳۴۶ تابع $f(x) = |x-a| + a$ در بازه $[1, 5]$ یک به یک است. حدود a در کدام گزینه آمده است؟

- ☐ (۱) $IR - (-5, -1)$
☐ (۲) $IR - (-5, 0)$
☐ (۳) $IR - (1, 5)$
☐ (۴) $IR - \{1, 5\}$

۳۳۷ اگر $g(x)$ تابعی یک به یک با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x+4}{g(x)-g(x^2-3)}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۳۸ اگر f تابع یک به یک روی مجموعه اعداد حقیقی باشد، معادله $f(2^x) = f(x^2)$ چند جواب مثبت دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

تایع وارون

توی بعضی سؤالات، از تعریف تایع وارون سؤال می پرسن، چند تا با هم ببینیم.

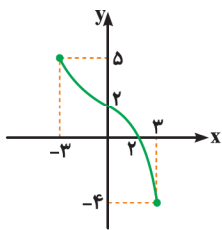
۳۳۹ وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می کند؟ (داخل ۱۴۰۱)

- ۱ (۱) ☐ $(-1, -2)$ ☐ $(2, \frac{5}{8})$ ☐ $(3, 1)$ ☐ $(4, -\frac{1}{8})$ ☐

۳۴۰ اگر نقطه $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5})$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{x}{a+a|x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

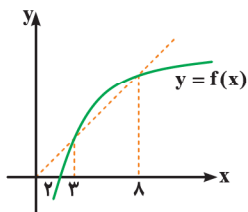
- ۱ (۱) ☐ $\frac{5}{27}$ ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ $\frac{3}{5}$ ☐

۳۴۱ نمودار تابع f با دامنه $[-3, 3]$ به صورت مقابل است. اگر $\frac{f^{-1}(5)}{f(a)+f^{-1}(0)} = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟



- ۱ (۱) ☐ صفر ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ ☐ ۳ (۳) ☐ -۱ ☐ ۴ (۴) ☐ $\frac{1}{2}$ ☐

۳۴۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم را نشان می دهد. دامنه تابع با ضابطه

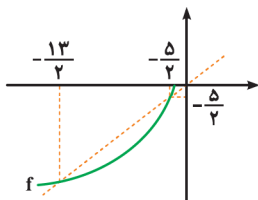


(داخل ۹۴)

کدام است $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ ؟

- ۱ (۱) ☐ $(0, 2]$ ☐ ۲ (۲) ☐ $[2, 3]$ ☐ ۳ (۳) ☐ $[2, 8]$ ☐ ۴ (۴) ☐ $[3, 8]$ ☐

۳۴۳ شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)



(تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۴) ☐

این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیر که باید مقدار تابع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته ها را یاد

می گیرین، بعدش کلی تست قشنگارو می خونیم.

۳۴۴ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ باشد. حاصل $g(4) - g(12)$ کدام است؟ (شبیه ساز تجربی ۹۹)

- ۱ (۱) ☐ -۱۰ ☐ ۲ (۲) ☐ ۶ ☐ ۳ (۳) ☐ ۱۰ ☐ ۴ (۴) ☐ -۶ ☐

۳۴۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$, $x \geq 1$ باشد، $(g \circ g)(1)$ کدام است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۴ (۴) ☐ ۹ (۳) ☐ صفر ☐

۳۴۶ اگر $f(x-1) = \log_3^{(x+1)}$ و $g(x) = 2\cos(\frac{\pi x}{4})$ باشد، مقدار $(f^{-1} \circ g)(4)$ کدام است؟

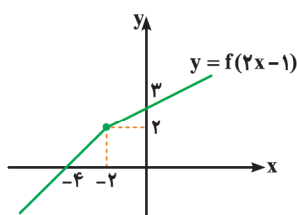
- ۷ (۴) ☐ -۱ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

۳۴۷ اگر $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ باشد، حاصل $(f+g^{-1})(-\frac{2}{5})$ کدام است؟

- $-\frac{11}{75}$ (۴) ☐ $-\frac{23}{75}$ (۳) ☐ $-\frac{11}{25}$ (۲) ☐ $-\frac{23}{25}$ (۱) ☐

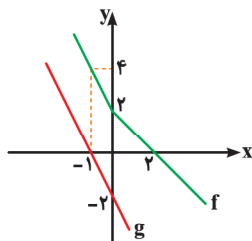
۳۴۸ اگر $f(x) = \begin{cases} 6-2x; & x < 2 \\ 4-x; & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x < 0 \\ x-4; & x \geq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f \circ g^{-1}(-5) + g \circ f^{-1}(-2)$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۸ (۲) ☐ ۷ (۱) ☐



۳۴۹ نمودار تابع $y = f(2x-1)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{f^{-1}(2) + f^{-1}(3)}{f(-5)}$ کدام است؟

- ۷ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ -۳ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐



۳۵۰ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $g \circ f^{-1}(-2) + g^{-1} \circ f(-1)$ چقدر است؟

(شبه‌ساز خارج ۱۴۰۱)

- ۱۶ (۱) ☐ -۱۴ (۲) ☐ -۱۳ (۳) ☐ -۱۰ (۴) ☐

۳۵۱ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

- ۵ (۴) ☐ ۹ (۳) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۱۵ (۱) ☐

۳۵۲ وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

- ۱ (۴) ☐ ۲ (۳) ☐ $\frac{1}{4}$ (۲) ☐ $\frac{1}{2}$ (۱) ☐

۳۵۳ وارون تابع $y = x^2 + \sqrt{b-ax}$ خط $y = x - 4$ را در نقطه $(a, -1)$ قطع می‌کند. مقدار $a - b$ کدام است؟

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

- ۴ (۴) ☐ ۲ (۳) ☐ -۴ (۲) ☐ -۲ (۱) ☐

۳۵۴ دو تابع با ضابطه‌های $\{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ ، $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ باشد، اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

۳۵۵ اگر $f = \{(\frac{1}{q}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$ ، $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ و $f \circ g^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام است؟

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

- $\frac{1}{8}$ (۴) ☐ $-\frac{1}{8}$ (۳) ☐ $\frac{1}{9}$ (۲) ☐ $-\frac{1}{9}$ (۱) ☐

۳۵۶ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+9}; & x \geq 3 \\ 2x-x^2; & x < 3 \end{cases}$ و $g = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- ۷ (۴) ☐ ۶ (۳) ☐ ۳ (۲) ☐ ۲ (۱) ☐

۳۵۷ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (۴) ☐ $\frac{3}{2}$ (۳) ☐ $\frac{3}{4}$ (۲) ☐ $\frac{1}{2}$ (۱) ☐

(خارج ۹۸)

۳۵۸ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

- ۳ (۴) ☐ $2/5$ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ $1/5$ (۱) ☐

(ریاضی داخل ۹۹)

۳۵۹ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\frac{2}{5}$
☐ ۲) $\frac{3}{5}$
☐ ۳) $\frac{4}{3}$
☐ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۶۰ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ و $g(x) = \frac{2x+a}{a-x}$ باشند و $(fog^{-1})(-1) = -\frac{11}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ☐ ۱) ۱
 ☐ ۲) ۲
 ☐ ۳) ۳
 ☐ ۴) ۴

(ریاضی داخل ۹۸)

۳۶۱ اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\{(4,2), (5,2)\}$
☐ ۲) $\{(4,2), (3,5)\}$
☐ ۳) $\{(5,2), (2,4)\}$
☐ ۴) $\{(3,5), (2,4)\}$

۳۶۲ اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ دوتا تابع باشند، بُرد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\{-1, 4\}$
☐ ۲) $\{2, 3\}$
☐ ۳) $\{3, 4\}$
☐ ۴) $\{2, -1\}$

(ریاضی خارج ۹۸)

۳۶۳ اگر $f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x}$ و $g^{-1}(x) = 1-x$ باشند، مقدار $(fog)(2)$ کدام است؟

- ☐ ۱) -۱
 ☐ ۲) ۲
 ☐ ۳) -۳
 ☐ ۴) -۵

۳۶۴ اگر $f(x) = x^2 + 4x + 15$ و $(fog)(x) = x^3 g(x) + 4g(x)$ باشد، مقدار $g^{-1}(3)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۲
 ☐ ۲) ۶
 ☐ ۳) ۳
 ☐ ۴) ۱

۳۶۵ اگر $f(a) = b$ باشد، همیشه نتیجه گرفت $f^{-1}(b) = a$ هستش! این ویژگی در حالت کلی تر هم قابل استفاده است.

۳۶۵ اگر $f(x^2 + 2x) = 2^x - 14$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۱۶
 ☐ ۲) ۱۴
 ☐ ۳) ۷۲
 ☐ ۴) ۵۴

۳۶۶ اگر $f^{-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = x^3 - 1$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۱
 ☐ ۲) ۲
 ☐ ۳) ۳
 ☐ ۴) ۴

۳۶۷ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می کند؟

(تجربی خارج ۹۹ و مشابه داخل ۹۹)

- ☐ ۱) $-\frac{3}{2}$
☐ ۲) $-\frac{3}{4}$
☐ ۳) -۱
 ☐ ۴) $-\frac{1}{2}$

۳۶۸ اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشند، آنگاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۱
 ☐ ۲) ۲
 ☐ ۳) ۳
 ☐ ۴) ۴

(داخل ۸۹)

۳۶۹ اگر $g(x) = f(3x-4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۵
 ☐ ۲) ۶
 ☐ ۳) ۷
 ☐ ۴) ۸

محاسبه ضابطه تابع وارون

این بخش رو با وارون کردن تابع های خطی شروع می کنیم. فقط کافیه جای x و y رو عوض کنید!

(داخل ۹۷)

۳۷۰ قریبه خطی به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- ☐ ۱) -۲
 ☐ ۲) -۱
 ☐ ۳) ۱
 ☐ ۴) ۲

۳۷۱ نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{x-3}{4}$ را در راستای محور y ها، 6 واحد به سمت پایین انتقال می دهیم. اگر A نقطه تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصله A از مبدأ مختصات کدام است؟

- ☐ ۱) $2\sqrt{5}$
☐ ۲) $\sqrt{5}$
☐ ۳) $2\sqrt{2}$
☐ ۴) $\sqrt{2}$

۳۷۲ فاصله نقطه $A(7,1)$ از نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\sqrt{7}$
☐ ۲) $\sqrt{11}$
☐ ۳) $\sqrt{13}$
☐ ۴) $\sqrt{15}$

۳۷۳ تابع $f(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x) - f^{-1}(x) = g(x+1)$ باشد، نمودار تابع $y = g(x)$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- اول (۱) ☐ دوم (۲) ☐ سوم (۳) ☐ چهارم (۴) ☐

۳۷۴ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ به کدام صورت است؟

- اول (۱) $y = x - 2; x \neq 3$ ☐ دوم (۲) $y = x - 2; x \neq 1$ ☐ سوم (۳) $y = x + 2; x \neq 3$ ☐ چهارم (۴) $y = x + 2; x \neq 1$ ☐

۳۷۵ اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a + b$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

- اول (۱) ± 3 ☐ دوم (۲) ± 2 ☐ سوم (۳) $2, -3$ ☐ چهارم (۴) $-2, 3$ ☐

۳۷۶ **iq** تابع خطی f با ضابطه $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(3f^{-1}(x)) = 3x + 5$ باشد، مقدار a کدام است؟

- اول (۱) $\frac{3}{5}$ ☐ دوم (۲) $\frac{2}{5}$ ☐ سوم (۳) $-\frac{3}{5}$ ☐ چهارم (۴) $-\frac{2}{5}$ ☐

برای تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجه دوم و درجه سوم است. توی این سؤال‌ها به محدود کردن دامنه توجه کنید.

۳۷۷ ضابطه وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟ (داخل ۹۲)

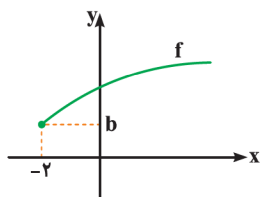
- اول (۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ ☐ دوم (۲) $y = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$ ☐

- سوم (۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$ ☐ چهارم (۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$ ☐

۳۷۸ قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ‌ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ‌ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

- اول (۱) 3 ☐ دوم (۲) -3 ☐ سوم (۳) -2 ☐ چهارم (۴) -4 ☐

۳۷۹ نمودار تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x+a}$ به صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور y ‌ها و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a+b)$ کدام است؟



- اول (۱) صفر ☐

- دوم (۲) 1 ☐

- سوم (۳) -2 ☐

- چهارم (۴) -4 ☐

۳۸۰ نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت و ۱ واحد به طرف y ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- اول (۱) ☐ دوم (۲) ☐ سوم (۳) ☐ چهارم (۴) ☐

۳۸۱ ضابطه وارون تابع $f(x) = (x-2)^2 + 6x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است. کدام است؟

- اول (۱) $-1 - \sqrt{x-3}$ ☐ دوم (۲) $-1 + \sqrt{x-3}$ ☐ سوم (۳) $2 + \sqrt{x-6}$ ☐ چهارم (۴) $2 - \sqrt{x-6}$ ☐

۳۸۲ **iq** ضابطه وارون تابع $f(x) = -2 + \sqrt{x-3}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور x ‌ها قرار دارد، کدام است؟

- اول (۱) $-2 \leq x < 0$ ☐ دوم (۲) $3 \leq x < 7$ ☐

- سوم (۳) $0 \leq x \leq 3$ ☐ چهارم (۴) $x^2 - 6x + 4; x \geq 0$ ☐

۳۸۳ **iq** ضابطه وارون تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

- اول (۱) $0 < x < 1$ ☐ دوم (۲) $x < 1$ ☐ سوم (۳) $0 < x < 1$ ☐ چهارم (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ ☐

۳۸۴ **iq** نمودار تابع $y = x^2 - 2x; x \geq 1$ را ابتدا نسبت به محور y ‌ها و سپس نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- اول (۱) $-1 - \sqrt{x-1}$ ☐ دوم (۲) $-1 + \sqrt{x-1}$ ☐ سوم (۳) $-1 - \sqrt{x+1}$ ☐ چهارم (۴) $-1 + \sqrt{x+1}$ ☐

۳۸۵ **iq** اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = (2x-1)g(x)$ باشد، ضابطه وارون تابع $y = f(x)$ با شرط $x \leq 1$ کدام است؟

- اول (۱) $y = 1 - \sqrt{x-1}$ ☐ دوم (۲) $y = 1 + \sqrt{x-1}$ ☐ سوم (۳) $y = 1 - \sqrt{x+1}$ ☐ چهارم (۴) $y = 1 + \sqrt{x+1}$ ☐

(ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۳۸۶ تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{x}; x \geq 0$ ○ (۲) $-\sqrt{x^3}; x \leq 0$ ○ (۳) $-\sqrt[3]{x}; x \leq 0$ ○ (۴) $-\sqrt{x^3}; x \geq 0$

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۸۷ اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ ○ (۲) ۳ ○ (۳) ۴ ○ (۴) ۹

(شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

۳۸۸ $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-1}$ وارون کدام است؟

- (۱) $x^2 - 2x + 2; x \geq 1$ ○ (۲) $x^2 - 2x; x \geq 1$ ○ (۳) $x^2 + 2x + 2; x \geq -1$ ○ (۴) $x^2 + 2x; x \geq -1$

(شبیه‌ساز ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۳۸۹ ضابطه وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ در دامنه محدود کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{4x+4} + 2$ ○ (۲) $2\sqrt{4x+4} - 2$ ○ (۳) $2\sqrt{x^2+1} + 2$ ○ (۴) $2\sqrt{x^2+1}$

برای وارون کردن آن‌ها باید به محدودیت دامنه توجه کنید!

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۳۹۰ تابع با ضابطه $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{y}x - 7, x \geq 2$ ○ (۲) $-\frac{1}{y}x + \frac{y}{y}, x \leq 3$ ○ (۳) $-2x + 14, x \leq 3$ ○ (۴) $-2x - \frac{14}{3}, x \geq 2$

(داخل ۹۴)

۳۹۱ نمودار تابع $y = |2x-6| - |x+4| + x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $-x + 6; x \leq -4$ ○ (۲) $-x + 5; x \geq 2$ ○ (۳) $-\frac{1}{y}x + 1; -4 \leq x \leq 1$ ○ (۴) $-\frac{1}{y}x + 1; -4 \leq x \leq 1$

۳۹۲ تابع f با ضابطه $f(x) = |2x-4| - |x+1| + x$ را در بازه‌ای اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} و خط $y = x+1$ با کدام طول متقاطع هستند؟

- (۱) ۱ ○ (۲) $\frac{1}{3}$ ○ (۳) $\frac{1}{3}$ ○ (۴) غیرمتقاطع (شبیه‌ساز ۹۹)

۳۹۳ دو تابع $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 2x$ را در نظر بگیرید. ضابطه وارون تابع $y = (f \circ g)(x)$ در بازه‌ای که نمودار آن اکیداً نزولی می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $-x + 3; x \leq 1$ ○ (۲) $-x + 4; x \leq 1$ ○ (۳) $-x + 3; x \leq 3$ ○ (۴) $-x + 4; x \leq 3$

(داخل ۹۴)

۳۹۴ تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{1+x}; x \leq 0$ ○ (۲) $1 - \sqrt{1-x}; x \leq 1$ ○ (۳) $1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$ ○ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$

۳۹۵ اگر $[x] = -1$ باشد، ضابطه وارون تابع $y = |x^2 - 1|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{x-1}; 0 < x < 1$ ○ (۲) $-\sqrt{x-1}; 0 < x < 1$ ○ (۳) $\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$ ○ (۴) $-\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$

چندتا هم وارون تابع دوضابطه‌ای هستیم.

(داخل ۹۶)

۳۹۶ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $-x^2$ ○ (۲) x^2 ○ (۳) $x|x|$ ○ (۴) $-x|x|$

۳۹۷ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1; x > 1 \\ 2x+2; x \leq 1 \end{cases}$ به صورت $f^{-1}(x) = \begin{cases} a(x-1); x > c \\ bx-1; x \leq c \end{cases}$ است. مقدار $f^{-1}(\frac{b}{a})$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۳۹۸ اگر $f(x) = \begin{cases} x[x]; -1 < x < 0 \\ 2^x; 0 \leq x < 2 \end{cases}$ باشد، ضابطه وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; 0 < x < 1 \\ \log_2 x; 1 < x < 4 \end{cases}$ (۱)

۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; 0 < x < 1 \\ \log_2 x; 1 \leq x < 4 \end{cases}$ (۲)

۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x; -1 < x < 0 \\ \log_2 x; 1 \leq x < 4 \end{cases}$ (۳)

۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x; 0 < x < 1 \\ \log_2 x; 1 \leq x < 4 \end{cases}$ (۴)

توضیح: به روش خیلی خوب برای وارون کردن تابع های هموگرافیک داریم که برای حل تست های زیر ارزش استفاده کنید و لذت ببرید.

۳۹۹ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{3x+2}{x-1} + 2$ کدام است؟

- ۱) $\frac{x+2}{x-3} - 2$ (۱) $\frac{x}{x-5} - 2$ (۲) $\frac{x+2}{x-3} + 2$ (۳) $\frac{x}{x+5} - 2$ (۴)

۴۰۰ تابع f با دامنه $\mathbb{R} - \{a\}$ و برد $\mathbb{R} - \{-2\}$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{bx+4}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- ۱) -2 (۱) $2/5$ (۲) -4 (۳) 5 (۴)

۴۰۱ iq اگر $f \circ f(x) = -2$ و $f^{-1}(0) = -2$ باشد، ضابطه وارون تابع $g(x) = \frac{4x+1}{2x+a}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{-1}{2}x + 1$ (۱) $\frac{-x+2}{2x-4}$ (۲) $\frac{-4x+1}{2x+4}$ (۳) (۴) وارون پذیر نیست.

۴۰۲ تابع $f(x) = \frac{4x-6}{2x+a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x) = f^{-1}(x)$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) -4 (۱) -2 (۲) 4 (۳) 2 (۴)

۴۰۳ iq اگر $x = \frac{f(x)-3x}{f(x)+4}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{x-1}{x+7}$ (۱) $\frac{x}{x+7}$ (۲) $\frac{x+1}{x-7}$ (۳) $\frac{x}{x-7}$ (۴)

۴۰۴ iq ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{ax}{1-|x|}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱) -1 (۱) 1 (۲) -2 (۳) 2 (۴)

برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g

توضیح: نوی تست های زیر، می خواهیم نقطه برخورد f^{-1} و g رو بررسی کنیم.

۴۰۵ اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ؛ $x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-4}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ (تجربی داخل ۹۸)

- ۱) 12 (۱) 15 (۲) 18 (۳) 21 (۴)

۴۰۶ اگر $x < \frac{3}{2}$ ؛ $f(x) = x^2 - 3x + 1$ و $g^{-1}(x) = 3x - 4$ باشند، نمودارهای دو تابع f و g در نقطه ای با کدام طول متقاطع اند؟

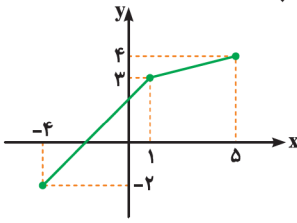
- ۱) 1 (۱) 2 (۲) -1 (۳) -2 (۴)

۴۰۷ iq اگر $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ؛ $x \geq 2$ باشد، نمودار تابع $y = 1 - f^{-1}(x)$ و $g(x) = \sqrt{f(x)+3}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از مبدأ

مختصات کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴)

۴۰۸ نمودار تابع f با دامنه $[-4, 5]$ به صورت مقابل است. نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = x + |x - 2|$ در چند نقطه



متقاطع هستند؟

۱ (۱) ☐

۲ (۲) ☐

۳ (۳) ☐

۴ (۴) متقاطع نیستند. ☐

برای حل تست‌های مربوط به برخورد f و f^{-1} به معنوی بودن تابع f توجه کنید.

۴۰۹ اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (داخل ۹۲)

۴ (۴) غیرمتقاطع ☐

۳ (۳) ☐

۲ (۲) ☐

۱ (۱) ☐

۴۱۰ فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

$2\sqrt{2}$ (۴) ☐

۳ (۳) ☐

$\sqrt{2}$ (۲) ☐

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱) ☐

۴۱۱ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۴, ۱ (۴) ☐

-۴, ۱ (۳) ☐

۴, -۱ (۲) ☐

-۴, -۱ (۱) ☐

۴۱۲ فاصله نقطه تقاطع تابع $y = x^3 + 3x - 12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

$\sqrt{2}$ (۴) ☐

$2\sqrt{2}$ (۳) ☐

$\sqrt{3}$ (۲) ☐

$2\sqrt{3}$ (۱) ☐

۴۱۳ نمودار وارون تابع $y = \log_4^{(2^{x+2}+32)}$ نمودار خود را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟ **iq**

$3\sqrt{3}$ (۴) ☐

$5\sqrt{2}$ (۳) ☐

$3\sqrt{2}$ (۲) ☐

$2\sqrt{2}$ (۱) ☐

۴۱۴ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1+x}}$ ، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می‌کند؟ (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

۱ (۴) ☐

۲ (۳) ☐

۳ (۲) ☐

۴ (۱) ☐

ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

به نظرتون $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ با هم برابرند؟ بریم ببینیم با هم.

۴۱۵ تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. کدام رابطه نادرست است؟

$(f \circ f^{-1})(3) = 3$ (۴) ☐

$(f^{-1} \circ f)(3) = 3$ (۳) ☐

$(f \circ f^{-1})(1) = 1$ (۲) ☐

$(f^{-1} \circ f)(1) = 1$ (۱) ☐

۴۱۶ در کدام تابع زیر رابطه $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ برقرار نیست؟

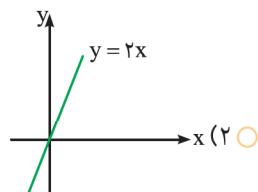
$f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$ (۴) ☐

$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ (۳) ☐

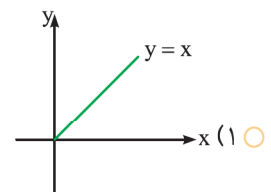
$f(x) = 1 + 2^x$ (۲) ☐

$f(x) = x^2 - 4x + 6; x \geq 2$ (۱) ☐

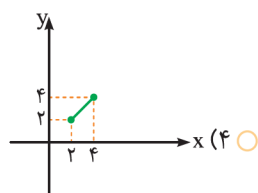
۴۱۷ اگر $f(x) = 4x - x^2; x \geq 2$ باشد، نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



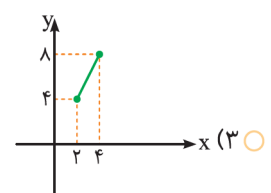
(۲) ☐



(۱) ☐



(۴) ☐



(۳) ☐

۳۱۸ اگر $f^{-1}(3x+1) = g\left(\frac{x+3}{4}\right)$ قابل تعریف باشد، مقدار $(fog)(3)$ کدام است؟

- ۲۸ (۴) ☐ ۲۴ (۳) ☐ ۱۸ (۲) ☐ ۱۲ (۱) ☐

۳۱۹ با توجه به ماشین مقابل، اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ باشد، آنگاه نمودار تابع $y = g(x)$ در کدام بازه زیر محور x ها است؟

- $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$
- (۸, +∞) (۲) ☐ [-۱, ۸) (۱) ☐
(۲, ۴) (۴) ☐ (۲, ۳] (۳) ☐

(ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۳۲۰ iq اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ $\sqrt{2}$ (۳) ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) ☐ $\frac{1}{2}$ (۱) ☐

۳۲۱ iq اگر $f(x) = x + \sqrt{x} + 3$ باشد، نمودار دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $y = \sqrt{-x+6}$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟

- ۴ (۴) غیرمتقاطع اند. ☐ ۴ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

چندتا سوال هم از وارون کردن ترکیب دو تابع ببینیم.

۳۲۲ دو تابع $f(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = \frac{1-x}{x+7}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1} \circ g)^{-1}(2)$ کدام است؟

- $-\frac{21}{11}$ (۴) ☐ $-\frac{20}{11}$ (۳) ☐ $-\frac{19}{11}$ (۲) ☐ $-\frac{18}{11}$ (۱) ☐

۳۲۳ اگر $f(x) = -5 + \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x+7}$ باشند، ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- $x+3$ (۴) ☐ $\frac{3x}{x-1}$ (۳) ☐ $\frac{x+1}{3}$ (۲) ☐ $x-3$ (۱) ☐

۳۲۴ iq اگر $(fog)(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ و $f^{-1}(4) = 1$ باشد، مقدار $g^{-1}(1)$ کدام است؟

- ۲ (۴) ☐ ۱ (۳) ☐ -۳ (۲) ☐ ۴ (۱) ☐

یادداشت:

فصل اول

درس هفتم:

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری

CHAPTER 1

درسته که تقسیم چند جمله‌ای‌ها برهم رو در سال نهم یاد گرفتین، اما در سال دوازدهم به‌طور تخصصی‌تری روش بحث میشه، جالبه بدونین که در سال‌های اخیر پای ثابت کنکور بوده.

۴۴۵ به ازای کدام مقدار a دو عبارت $P(x) = ax^2 + x - 7$ و $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 3$ در تقسیم بر $x - 2$ هم باقی‌مانده هستند؟

- ☐ ۱) -۹ ☐ ۲) -۱ ☐ ۳) ۷ ☐ ۴) ۱۱

(تجزیه اویلر اول، ۱۴۰۴)

۴۴۶ چند جمله‌ای $f(x) = x^5 - 3x^2 + ax + 5$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. مقدار a کدام است؟

- ☐ ۱) -۱/۵ ☐ ۲) ۱/۵ ☐ ۳) -۲/۵ ☐ ۴) ۲/۵

۴۴۷ به ازای یک مقدار a چند جمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $x - 1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی‌مانده $P(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

(تأرجح ۹۹)

- ☐ ۱) -۱۰ ☐ ۲) -۸ ☐ ۳) ۴ ☐ ۴) ۶

۴۴۸ چند جمله‌ای $P(x) = x^3 - 3ax - 7$ بر $x - 1$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

- ☐ ۱) -۲۵ ☐ ۲) -۲۷ ☐ ۳) -۱۵ ☐ ۴) -۱۷

۴۴۹ کدام عدد را به حاصل ضرب $x^2 + 5$ و $x - 8$ اضافه کنیم تا حاصل بر $x - 3$ بخش پذیر باشد؟

- ☐ ۱) ۲۵ ☐ ۲) -۱۷ ☐ ۳) ۷۰ ☐ ۴) ۸۶

۴۴۰ اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای و رابطه $P(x) = 2P(-x) + 4x$ برقرار باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ چقدر است؟ (شماره داخل ۹۹)

- ☐ ۱) -۷/۵ ☐ ۲) -۸/۳ ☐ ۳) -۸/۵ ☐ ۴) -۷/۳

۴۴۱ فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند، باقی‌مانده تقسیم $P(x) + 2P(-x)$ بر $x^2 - 2$ کدام است؟

(تأرجح ۹۹)

- ☐ ۱) ۷ ☐ ۲) ۱ ☐ ۳) صفر ☐ ۴) -۱

۴۴۲ اگر $P(x) = x^2 + mx^2 + (3m - 2)x - 10m - 4$ باشد، باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x + 1$ کدام است؟

- ☐ ۱) صفر ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۲ ☐ ۴) ۸

در سؤال زیر، مقسوم‌علیه ریشه نداره یا ریشه هاش به راحتی به دست نمیداد. ولی باز هم میشه به کارایی کرد!

۴۴۳ باقی‌مانده تقسیم $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 1$ بر $x^2 + 1$ کدام است؟

- ☐ ۱) $2x - 1$ ☐ ۲) $-6x + 2$ ☐ ۳) $-2x + 1$ ☐ ۴) $6x - 2$

در سؤالای بعدی، در مورد خارج قسمت پرسیدیم، طبیعتیه که برای حل سؤالای زیر باید به محاسبه باقی‌مانده مسلط باشین.

۴۴۴ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $f(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج قسمت این

(تأرجح ۱۴۰۱)

تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

- ☐ ۱) $-x + 2$ ☐ ۲) $2x - 1$ ☐ ۳) $3x - 2$ ☐ ۴) $-2x + 3$

۴۳۵ اگر $q(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^7 - 4x^5 + x^2 + 1$ بر $x+2$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۳) ☐ -۲ (۴) ☐

۴۳۶ چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ بر $x+2$ بخش پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۶ است. اگر $Q(x)$ خارج قسمت

این تقسیم باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1) + Q(\frac{x}{4})$ بر $x-2$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ☐ ۱۴ (۲) ☐ ۱۳ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐

تذکره: در برخی مواقع توان مجهوله، اول تکلیف اونو روشن کنیم.

۴۳۷ عبارت $k - 5x^3 + 2x^{2n} + x^{2n+1}$ به ازای تمام مقادیر n بر $x+2$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم این عبارت بر $x-1$ کدام است؟

- ۹ (۱) ☐ -۹ (۲) ☐ ۱ (۳) ☐ -۱۰ (۴) ☐

۴۳۸ باقی‌مانده تابع چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + x^{\frac{2n+3}{n}} - 2x^{n-3} + 1 + n$ بر $2x-1$ کدام است؟

- ۳/۲۵ (۱) ☐ ۳/۵ (۲) ☐ ۲/۲۵ (۳) ☐ ۲/۵ (۴) ☐

۴۳۹ چندجمله‌ای $P(x) = x^{3n+1} + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش پذیر است. برای $n=1$ باقی‌مانده

تقسیم $P(x)$ بر x^2+2x-3 کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

- ۵x+۴۴ (۱) ☐ -۱۵x+۲۴ (۲) ☐ -۱۵x+۱۴ (۳) ☐ -۵x+۳۴ (۴) ☐

تذکره: اکثر سؤالاتی که در این بخش به معسوم علیه درجه یک، اما در این بخش که سابقه کنکوری هم داشته راجع به درجات بالاتر بحث کردیم.

۴۴۰ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-3x-4 برابر $3x-4$ است. باقی‌مانده تقسیم $P(x+1)$ بر $x+2$ کدام است؟

- ۷ (۱) ☐ ۷ (۲) ☐ ۱ (۳) ☐ -۱ (۴) ☐

۴۴۱ اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 1$ بر $x-1$ برابر x^2 باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

- ۷ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ -۱ (۳) ☐ ۹ (۴) ☐

۴۴۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^4 + ax^2 + 3x + b$ بر $x-x^2$ برابر $x+4$ و خارج قسمت آن $Q(x)$ است. باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای $4P(x) + Q(x+1)$ بر $x-1$ کدام است؟

- ۲۴ (۱) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۳۶ (۳) ☐ ۴۸ (۴) ☐

۴۴۳ در تقسیم چندجمله‌ای $P(x+2) - 3x - 1$ بر $2x^2 - 3x - 1$ خارج قسمت برابر $Q(x)$ و باقی‌مانده صفر است. اگر باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x+1$

برابر ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

- ۸ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐

۴۴۴ باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2+2x به ترتیب $3x+1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2) = 3$ آن‌گاه مقدار باقی‌مانده

تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

- ۶ (۱) ☐ -۵ (۲) ☐ -۴ (۳) ☐ -۳ (۴) ☐

۴۴۵ تابع چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$)

به ترتیب -2 و $\frac{1}{4}x+1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

- ۴ (۱) ☐ ۶ (۲) ☐ ۷ (۳) ☐ ۹ (۴) ☐

تذکره: در بعضی مسائل معسوم علیه ریشه مضاعف دارد. در این سؤال‌ها باید کمی مشتق بلد باشیم.

۴۴۶ اگر $f(x) = 2x^2 + ax^2 + bx + 2$ بر $x^2 - 4x + 4$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه $2a+3b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۴۷ باقی‌مانده $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ بر $x^2 - 2x + 1$ برابر با $3x+1$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ -۳ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

سرخ حالا وقتشه بریم سراغ اتحادها در حالت پیشرفته‌تر!

 ۴۴۸ عبارت $(x^3 + 2)^4 - (x^3 + x^2 + 1)^4$ به چه تعداد از عبارت‌های زیر بخش پذیر نیست؟

- الف) $x+1$ (۱) ☐ ب) $x-1$ (۲) ☐ پ) x^2-1 (۳) ☐ ت) x^2+1 (۴) ☐

 ۴۴۹ در تساوی $\frac{P(x)}{x^7-1} = \frac{1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1} - \frac{2}{x^7-1}$ عبارت $P(x)$ کدام است؟

- الف) $x+3$ (۱) ☐ ب) $-x+3$ (۲) ☐ پ) $-x-3$ (۳) ☐ ت) $x-3$ (۴) ☐

 ۴۵۰ عبارت $x^{20}+1$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

- الف) x^2+1 (۱) ☐ ب) $x^{10}+1$ (۲) ☐ پ) x^5+1 (۳) ☐ ت) x^4+1 (۴) ☐

 ۴۵۱ عبارت $x^{15}-1$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

- الف) x^3+1 (۱) ☐ ب) x^2+1 (۲) ☐ پ) x^2+x+1 (۳) ☐ ت) x^2-x+1 (۴) ☐

 ۴۵۲ به ازای چه مقادیری از n چندجمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x+a$ بخش پذیر است؟

- الف) هر عدد طبیعی n (۱) ☐ ب) مقادیر زوج n (۲) ☐ پ) مقادیر فرد n (۳) ☐ ت) هیچ مقدار n (۴) ☐

 ۴۵۳ خارج قسمت تقسیم عبارت x^9+1 بر $x+1$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

- الف) ۱ (۱) ☐ ب) ۶ (۲) ☐ پ) -۳ (۳) ☐ ت) ۹ (۴) ☐

 ۴۵۴ اگر $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای x^6-64 بر $x+2$ باشد، مقدار $Q(-2)$ کدام است؟

- الف) -۱۹۲ (۱) ☐ ب) ۱۹۲ (۲) ☐ پ) -۹۶ (۳) ☐ ت) ۹۶ (۴) ☐

 ۴۵۵ *iq* اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $2-x^{14}$ بر x^2+x+1 باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$) (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

- الف) ۱ (۱) ☐ ب) -۱ (۲) ☐ پ) -۲ (۳) ☐ ت) ۴ (۴) ☐

 ۴۵۶ *iq* اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x) = x^5+ax^3$ و $p(x) = x^6+3x^3+2x^2$ ، دوجمله‌ای x^n+x^3 باشد، مقدار na کدام است؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۴)

- الف) -۲ (۱) ☐ ب) -۱ (۲) ☐ پ) ۲ (۳) ☐ ت) ۱ (۴) ☐

یادداشت:

۲ ۳۳۶

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

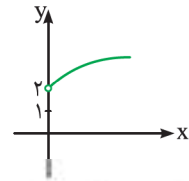
دامنه تابع $f+g$ برابر $D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, +\infty)$ است.

اکنون با به دست آوردن ضابطه تابع $f+g$ ، آن را رسم می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 2$$



مطابق نمودار، برد تابع $f+g$ برابر $(2, +\infty)$ است.

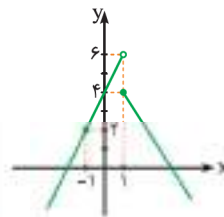
۱ ۳۳۷

ابتدا ضابطه تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -x+5 & ; x \geq 1 \\ 2x+4 & ; -1 \leq x < 1 \\ 3x+5 & ; x < -1 \end{cases}$$

اکنون با رسم تابع $f+g$ ، برد آن را محاسبه می‌کنیم:

مطابق شکل، برد تابع $f+g$ برابر $(-\infty, 6)$ است.



۱ ۳۳۸

دامنه تابع f برابر $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ است. با توجه به دامنه توابع f و

g ، مقادیر مختلف تابع $y = (\sqrt{f^2 + g}) \cdot g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x=1: y = \sqrt{(f^2(1) + g(1)) \cdot g(1)} = \sqrt{(2+2) \times 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x=0: y = \sqrt{(f^2(0) + g(0)) \cdot g(0)} = \sqrt{(3+3) \times 3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار این تابع، برابر $3\sqrt{2}$ است.

۲ ۳۳۹

تابع $g(x)$ را با توجه به دامنه تابع f تشکیل می‌دهیم ($D_g = D_f$):

$$g(2) = 2 + f(2) = 2 + 7 = 9 \quad g(3) = 3 + f(3) = 3 + (-1) = 2$$

$$g(4) = 4 + f(4) = 4 + 2 = 6 \quad g(5) = 5 + f(5) = 5 + 4 = 9$$

$$R_g = \{2, 6, 9\}$$

اعضای برد تابع g عبارت است از:

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{\text{مجموع اعضای برد}} 2 + 6 + 9 = 17$$

۱ ۳۴۰

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت ۱ اگر $x - [x] = 0$ و $[x] + [-x] = 0$ عددی صحیح باشد آن گاه $x - [x] = 0$ و $[x] + [-x] = 0$ است پس:

$$f(x) - g(x) = 0 - 2^0 = 0 - 1 = -1$$

حالت ۲ اگر x عددی غیر صحیح باشد، آن گاه $[x] + [-x] = -1$ و

$$f(x) - g(x) = -1 - 2^{x-[x]} \quad \text{پس:}$$

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow 2^0 < 2^{x-[x]} < 2^1 \Rightarrow 1 < 2^{x-[x]} < 2$$

$$\xrightarrow{x(-1)} -1 > -2^{x-[x]} > -2 \xrightarrow{-1} -2 > -1 - 2^{x-[x]} > -3$$

بنابراین اگر x عددی غیر صحیح باشد $-3 < f(x) - g(x) < -2$

است، پس برد تابع $f - g$ برابر است با: $R_{f-g} = (-3, -2) \cup \{-1\}$

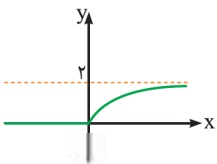
۲ ۳۳۶

ابتدا ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+|x|}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{2x}{x+2} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

اکنون با رسم تابع $\frac{f}{g}$ ، بُرد آن را محاسبه می‌کنیم:

مطابق شکل، برد تابع $\frac{f}{g}$ برابر $[0, 2]$ است.

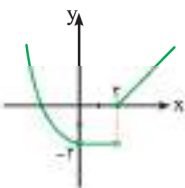


۲ ۳۳۷

ابتدا ضابطه تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; x < 0 \\ -2 & ; 0 \leq x < 2 \\ x - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

اکنون نمودار تابع $f+g$ را رسم می‌کنیم:



۴ ۳۳۸

ابتدا $g(f(a)) = 5$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

$$a \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{g} 5 \Rightarrow (a, \bigcirc) \in f, (\bigcirc, 5) \in g$$

حال چون زوج مرتب $(6, 5)$ در تابع g وجود دارد، پس $\bigcirc = 6$ بوده و

در نتیجه $f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$ است: $f(a) = 6$



۳ ۳۳۹

از آن جایی که اشتراک دامنه توابع f و g به صورت $\{2, 4\}$ است، پس:

$$f \times g = \{(2, -2 \times 3), (4, 1 \times 2)\} = \{(2, -6), (4, 2)\}$$

حال تابع fog را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$-1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 1$$

$$2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} -2 \Rightarrow fog = \{(-1, 1), (4, -2)\}$$

$$4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -2$$

$$\Rightarrow f \times g + fog = \{(4, 0)\}$$

۳ ۳۴۴

ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= f([x + f(x)]) = f([x + 2[x] - x]) = f(2[x]) \\ &= 2[2[x]] - 2[x] = 4[x] - 2[x] = 2[x] \Rightarrow g(x) = 2[x] \\ \text{حال با توجه به این که } f(-\frac{5}{3}) &= -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3} \\ f(f(-\frac{5}{3})) &= g(-\frac{7}{3}) = 2[-\frac{7}{3}] = 2 \times (-3) = -6 \end{aligned}$$

۳ ۳۴۵

با فرض $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$ ، خروجی ماشین، همان خروجی تابع $g \circ f$ است. بنابراین اگر ورودی ماشین را در نظر بگیریم، داریم:

$$g(f(a)) = \frac{f(a)}{\sqrt{f(a)} + 1} = \frac{4}{\sqrt{4} + 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow 2a - 2 = 4 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۳ ۳۴۶

ابتدا بررسی می‌کنیم تابع $f(x)$ در چه طول‌هایی صفر می‌شود.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, & 1 \in [0, 2] \quad \checkmark \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, & -1 \in [-2, 0] \quad \checkmark \end{cases}$$

اگر -1 یا 1 باشد، مقدار $f(f(x))$ برابر صفر است. بنابراین جواب‌های معادله $f(x) = 1$ و $f(x) = -1$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, & 2 \in [0, 2] \quad \checkmark \\ x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, & 0 \in [-2, 0] \quad \times \end{cases}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, & 0 \in [0, 2] \quad \checkmark \\ x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2, & -2 \in [-2, 0] \quad \checkmark \end{cases}$$

بنابراین معادله $f \circ f(x) = 0$ جواب قابل قبول دارد.

۴ ۳۴۷

برای پیدا کردن $f(g(1))$ باید ابتدا $g(1)$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = 6 - f(x - 3) \xrightarrow{x=1} g(1) = 6 - f(-2) = 6 - 2 = 4$$

بنابراین $f(g(1)) = f(4)$ است. طبق نمودار $f(4) = 8$ است، پس:

$$f \circ g(1) = 8$$

۲ ۳۴۸

با توجه به شکل صورت سوال $f(x+1) = x+2$ و $g(x-1) = -x+4$ است. حالا ابتدا $f(3)$ و $g(-3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=2} f(3) = 2+2 = 4$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=-2} g(-3) = 2+4 = 6$$

پس $f(6)$ و $g(4)$ است. حالا $f(g(-3)) + f(g(-3)) = g(4) + f(6)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=5} f(6) = 5+2 = 7$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=5} g(4) = -5+4 = -1$$

پس $g(4) + f(6) = -1 + 7 = 6$ است.

۲ ۳۴۹

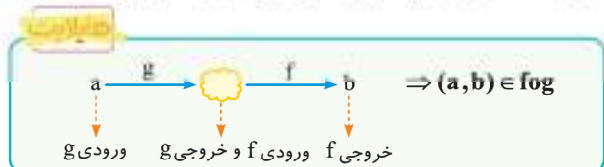
با توجه به صورت سؤال داریم:

$$(4, 2) \in f \circ g \Rightarrow 4 \xrightarrow{g} \circ \xrightarrow{f} 2 \Rightarrow (\circ, 2) \in f, (4, \circ) \in g$$

چون $(3, 2) \in f$ ، پس $\circ = 3$. پس $(4, 3) \in g$ و در نتیجه $a = 4$ است. از طرفی:

$$(4, 1) \in g \circ f \Rightarrow 4 \xrightarrow{f} \circ \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow (4, \circ) \in f, (\circ, 1) \in g$$

با توجه به این که $(4, 5) \in f$ ، پس $\circ = 5$ است؛ بنابراین $(5, 1) \in g$ و در نتیجه $b = 5$ خواهد بود. در نتیجه دوتایی (a, b) به صورت $(4, 5)$ است.



۱ به پوره دیگه! طراح می‌توانست توی همین سؤال، بپرسه: «بر تابع $f \circ g$ کدام است؟»

جواب: $f \circ g = \{(1, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)\} \Rightarrow R_{f \circ g} = \{1, 2, 3\}$

۱ ۳۴۹

ابتدا $f(\sqrt{3}-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = |x-1| + |2x+1|$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = |\sqrt{3}-2| + |2(\sqrt{3}-1)+1|$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = (2-\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1$$

حال با جای‌گذاری $\sqrt{3}+1$ در تابع g داریم:

$$g(f(\sqrt{3}-1)) = g(\sqrt{3}+1) = [-(\sqrt{3}+1)+1] = [-\sqrt{3}] = -2$$

۱ ۳۴۹

ابتدا ضابطه g را به صورت $g(x) = (x+1)^2$ می‌نویسیم و سپس مقادیر $f(1-\sqrt{2})$ و $g(1-\sqrt{2})$ را به دست می‌آوریم:

$$1) f(1-\sqrt{2}) = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

$$2) g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) = f(6-4\sqrt{2}) - g(\sqrt{2}-1)$$

$$= |6-4\sqrt{2}| - (\sqrt{2}-1+1)^2 = 6-4\sqrt{2} - 2 = 4-4\sqrt{2}$$

۱ ۳۴۹

چون عبارت $\sin \pi x - 1$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم مقادیر سینوس همواره در بازه $[-1, 1]$ هستند؛ بنابراین نامساوی (۱) تنها در صورتی برقرار است که $\sin \pi x = 1$ باشد، بنابراین:

$$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای x ، تمام ورودی‌های تابع f ، اعدادی غیر صحیح هستند. همچنین می‌دانیم عبارت $[x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح برابر -1 است، پس:

$$f(x) = \underbrace{[x] + [-x]}_{-1} + \sqrt{\sin \pi x - 1} = (-1) + \sqrt{0} = -1$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}f(x)) = f(-\frac{1}{2} \times -1) = f(\frac{1}{2}) = -1 + 0 = -1$$

به هوره دنگه اطراح می تونست اینهوری بیرسه،
«جواب بزرگ تر معادله $f \circ g(x) = 1$ کدام است؟»

جواب: $2 + \sqrt{2}$

۴ ۲۵۵

در تابع g ، به جای همه x ها، $f(x)$ قرار می دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-(\frac{2x-1}{x+1})} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{\frac{2(x+1)-(2x-1)}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{6x}{3} = 2x$$

با جای گذاری $x=2$ در تابع g داریم:

$$g(f(2)) = g(1) = 4$$

نتیجه گیری این که به ازای $x=2$ برابر ۴ می شود، گزینه (۴) است.

۲ ۲۵۶

ابتدا ضابطه تابع های $f \circ g(x)$ و $f(x+3)$ را پیدا می کنیم:

$$1) f(g(x)) = 2((3x+1)^2 - (3x+1) - 3) = 2(9x^2 + 3x - 3)$$

$$2) f(x+3) = 2((x+3)^2 - (x+3) - 3) = 2(x^2 + 5x + 3)$$

حالا نقاط تلاقی این دو نمودار را پیدا می کنیم:

$$f(g(x)) = f(x+3) \Rightarrow 2(9x^2 + 3x - 3) = 2(x^2 + 5x + 3)$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 2x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

پس این دو نمودار در دو نقطه به طول های $x=1$ و $x=-\frac{3}{4}$ متقاطع اند.

۲ ۲۵۷

ضابطه تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم و داریم:

$$f(f(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

حالا با توجه به رابطه $(f \circ f)(x) = f(x-3) + f(x+1)$ داریم:

$$a^2x + ab + b = a(x-3) + b + a(x+1) + b$$

$$\Rightarrow a^2x + ab = 2ax - 2a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2a \xrightarrow{a \neq 0} a = 2 \\ ab = -2a + b \Rightarrow 2b = -4 + b \Rightarrow b = -4 \end{cases}$$

پس $f(x) = 2x - 4$ است و $f(5) = 10 - 4 = 6$ است.

۱ ۲۵۸

با توجه به $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ ضابطه های $(g \circ f)(x)$

و $(f \circ g)(x)$ را به دست آورده و معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ را حل

می کنیم:

$$1) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4(x+2)}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

اعضای تابع $g \circ f$ را پیدا می کنیم:

$$a \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 5$$

$$-1 \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \frac{2b-1}{b+1}$$

$$1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} -1$$

$$3 \xrightarrow{f} -4 \xrightarrow{g} 3$$

با توجه به صورت سوال، اعضای بُرد تابع $g \circ f$ به صورت $\{-1, c, 1, 5\}$ است، پس:

$$(1) c = 3, (2) \frac{2b-1}{b+1} = 1 \Rightarrow 2b-1 = b+1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow b \times c = 2 \times 3 = 6$$

۱ ۲۵۹

می دانیم $f(2) = 1$ است، پس:

$$g(f(x)) = x^2 - x + 1 \xrightarrow{x=2} g(f(2)) = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow g(1) = 3$$

حالا در رابطه $f \circ g(x) = x^2 + 3x + 1$ به جای x عدد ۱ می گذاریم:

$$f(g(1)) = 1^2 + 3 + 1 = 5 \xrightarrow{g(1)=3} f(3) = 5$$

۳ ۲۵۱

ابتدا $g(3)$ را پیدا می کنیم:

$$f(g(x)+x) = 6x+1 \xrightarrow{x=3} f(g(3)+3) = 6 \times 3 + 1 = 19$$

حالا اگر در رابطه $f(x+1) = 2x+1$ به جای x عدد ۹ قرار دهیم، نتیجه

می گیریم $f(10) = 19$ است. پس:

$$g(3) + 3 = 10 \Rightarrow g(3) = 7$$

بنابراین $f(g(3)) = f(7)$ است و داریم:

$$f(x+1) = 2x+1 \xrightarrow{x=6} f(7) = 2(6) + 1 = 13$$

۲ ۲۵۲

ابتدا $f(g(1))$ را محاسبه می کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & ; x < 1 \\ f(x-1) & ; x \geq 1 \end{cases} \text{ برای پیدا کردن } g(1) \text{ باید در تابع } g(x) \text{ سراغ}$$

ضابطه پایینی برویم:

$$g(1) = f(1-1) = f(0) \xrightarrow{f(x)=x^2+1; x < 2} f(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(g(1)) = f(f(0)) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

۳ ۲۵۳

ضابطه تابع را تشکیل می دهیم:

$$f(f(x)) = 2 - |f(x) - 2| = 2 - |2 - |x - 2|| - 2|$$

$$= 2 - ||x - 2|| = f(x)$$

۲ ۲۵۴

ابتدا ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ g(f(x)) = (x^2 + 2x) - 3 \\ g(x) = x - 3 \end{cases}$$

حال معادله $(g \circ f)(x) = 2$ را حل می کنیم:

$$x^2 + 2x - 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -2 \\ P = \alpha \times \beta = -5 \end{cases}$$

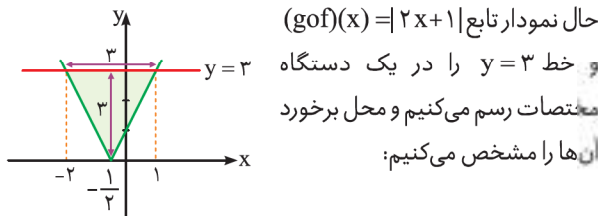
$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2(-5) = 14$$

۳۳۳

ابتدا ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$$g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$



$$|2x+1|=3 \Rightarrow x=-2, x=1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

۳۳۴

چون نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه با طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع می کند پس $f(6)=0$ و $f(-\frac{1}{4})=0$ است. حال برای مشخص کردن محل برخورد نمودار تابع $f \circ g$ با محور x ها، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$f(g(x))=0 \Rightarrow \begin{cases} g(x)=6 \Rightarrow x-\sqrt{x}=6 \Rightarrow x=9 \\ g(x)=-\frac{1}{4} \Rightarrow x-\sqrt{x}=-\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

۳۳۵

چون g محور طول ها را در $x=1$ و $x=2\sqrt{2}$ قطع می کند، پس:

$$g(1)=0, \quad g(2\sqrt{2})=0$$

بنابراین تابع $g(f(x))$ در نقاطی محور x ها را قطع می کند که $f(x)=1$ یا $f(x)=2\sqrt{2}$ باشد:

$$f(x)=1 \Rightarrow x\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

$$f(x)=2\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{x}=2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان}} x^3=8 \Rightarrow x=2$$

بنابراین اختلاف طول برابر است با: $2-1=1$

۳۳۶

ابتدا تابع $f \circ g(x)$ را پیدا می کنیم:

$$f(g(x)) = f(2x+1) = \begin{cases} 3(2x+1)-12 & ; 2x+1 \geq 3 \\ (2x+1)^2-1 & ; 2x+1 < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \begin{cases} 6x-9 & ; x \geq 1 \\ 4x^2+4x & ; x < 1 \end{cases}$$

حالا برای حل معادله $f \circ g(x)=0$ هریک از ضابطه ها را برابر صفر می گذاریم:

$$x \geq 1: 6x-9=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$x < 1: 4x^2+4x=0 \Rightarrow 4x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه ها برابر $\frac{1}{2} + 0 + (-1) = -\frac{1}{2}$ است.

$$2) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = \frac{2x+7}{x+6} \Rightarrow \frac{(2x+7)(x+6)}{6x^2+43x+42} = \frac{(2x+7)(x+2)}{2x^2+11x+14}$$

$$\Rightarrow 4x^2+32x+28=0 \Rightarrow \frac{4x^2+8x+7}{a+c}=0 \Rightarrow x=-1, x=-7$$

می توانستیم از گزینه ها اعداد را جای گذاری کنیم.

۳۳۹

ابتدا ضابطه $f \circ g$ را تشکیل می دهیم:

$$f(g(x)) = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{2}\right) - 2 = \frac{x^2-4x-5}{4}$$

می دانیم عرض نقاطی از نمودار تابع که زیر محور x ها قرار می گیرند، منفی است:

$$\frac{x^2-4x-5}{4} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

چون $x=4$ و $x=0$ در نامعادله $f(g(x)) < 0$ صدق می کنند؛ پس گزینه (۲) درست است.

۳۴۰

می دانیم $[x] + [-x]$ به ازای x های صحیح برابر صفر و به ازای x های غیر صحیح برابر -1 است، پس دو حالت برای مقادیر x در نظر می گیریم:

$$x \in \mathbb{Z}: g(f(x)) = g(0) = 4$$

$$x \notin \mathbb{Z}: g(f(x)) = g(-1) = 3$$

پس به ازای تمام x های غیر صحیح تابع $g \circ f$ برابر ۳ است.

۳۴۱

می دانیم $f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ است. حالا ضابطه $f \circ g(x)$ را پیدا می کنیم و برای این که ببینیم نمودار آن در کدام بازه زیر محور x ها قرار دارد، خواهیم داشت:

$$f(g(x)) = ([x]-2)([x]-5) < 0 \Rightarrow 2 < [x] < 5$$

چون حاصل $[x]$ مقداری صحیح است، پس $[x]=3$ یا $[x]=4$ است، یعنی:

$$3 \leq x < 5$$

بنابراین نمودار $f \circ g$ در بازه $[3, 5)$ زیر محور x ها قرار دارد و $b-a=5-3=2$ است.

۳۴۲

ضابطه $g \circ f$ را تشکیل می دهیم و آن را برابر ۱ قرار می دهیم:

$$g \circ f(x) = 1 \Rightarrow |2|x-3|-7|=1 \Rightarrow \begin{cases} 1) 2|x-3|-7=1 \\ 2) 2|x-3|-7=-1 \end{cases}$$

حالا هر یک از معادله های (۱) و (۲) را حل می کنیم:

$$1) 2|x-3|=8 \Rightarrow |x-3|=4 \Rightarrow \begin{cases} x-3=4 \Rightarrow x=7 \\ x-3=-4 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$2) 2|x-3|=6 \Rightarrow |x-3|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-3=3 \Rightarrow x=6 \\ x-3=-3 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

پس مجموع جواب های معادله $(g \circ f)(x) = 1$ برابر است با:

$$7 + (-1) + 6 + 0 = 12$$

۲ ۳۶۷

با توجه به نمودار تابع $g(x)$ در صورت سؤال $g(2) = 0$ است، پس برای حل معادله داریم:

$$g(f(g(x+2))) = 0 \Rightarrow f(g(x+2)) = 2$$

حالا باید $f(x)$ را برابر ۲ قرار دهیم:

$$f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 = 2 \Rightarrow x = 6 \\ \frac{1}{2}x - 1 = -2 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

پس باید $g(x+2)$ برابر ۲ یا ۶ باشد:

$$g(x+2) = 6 \rightarrow \text{یک جواب}$$

$$g(x+2) = -2 \rightarrow \text{یک جواب}$$

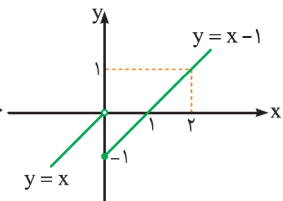
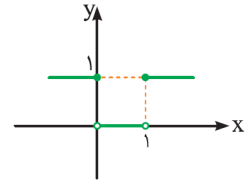
پس معادله دارای ۲ ریشه است.

۱ ۳۶۸

ضابطه تابع‌های $y = x - f(x)$ و $y = fog$ را پیدا می‌کنیم و نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1; & x^2 - x \geq 0 \\ 0; & x^2 - x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1; & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \\ 0; & 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow$$



دو نمودار فقط در یک نقطه به طول $x = 2$ مشترک هستند.

۴ ۳۶۹

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) - g(x) = -x + 5$ است. در ضمن با توجه به رابطه صورت سؤال $2g(x) = 3f(x) - 14$ است، پس:

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = -x + 5 \\ 3f(x) - 2g(x) = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(x) + 2g(x) = 2x - 10 \\ 3f(x) - 2g(x) = 14 \end{cases}$$

از حل دو معادله و دو مجهول بالا نتیجه می‌گیریم $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = 3x - 1$ است. بنابراین:

$$f(g(x)) = 2(3x - 1) + 4 = 6x + 2$$

از طرفی با توجه به نمودار صورت سؤال، $f(g(x)) = -\frac{2}{a}x + 2$ است،

$$-\frac{2}{a}x + 2 = 6x + 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۲ ۳۷۰

چون $f(g(x))$ را داریم و $f(3)$ را می‌خواهیم، پس $g(x)$ را برابر ۳ می‌گذاریم:

$$g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

حالا در تابع $(fog)(x)$ به جای x عدد ۲ قرار می‌دهیم:

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{x=2} f(g(2)) = \frac{2}{2-3} \Rightarrow f(3) = -2$$

مثال ۱

یافتن ضابطه تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع g (تابع درونی)

را می‌دهند و ضابطه تابع f [تابع بیرونی] یعنی $f(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل از سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ضابطه تابع $g(x)$ را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به دست می‌آوریم.

۲ در تابع مرکب داده شده، به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f برحسب t یعنی $f(t)$ را به دست می‌آوریم.

۳ در تابع $f(t)$ به جای همه t ها، x می‌گذاریم تا ضابطه $f(x)$ به دست آید.

۴ به پوره دیگه! طراح می‌تونست یه سؤال بپرسه و البته سخت پیرسه. اینپوری:
 اگر $fog(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g(x) = 2x - 1$ باشد، بُد تابع $f(x)$ کدما است؟
 جواب: $f(x) = \frac{x+1}{x-5} \Rightarrow R = \mathbb{R} - \{5\}$

۳ ۳۷۱

با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{t+1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t+1}{2}\right) + 5 = 2(t^2 - 2t + 1) + 3(t-1) + 5$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده، $f(t) = 2t^2 - t + 4$ می‌شود که با جای گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ خواهد شد.

۵ به پوره دیگه! طراح می‌تونست پیرسه:

$$f(g(0)) = 5 \xrightarrow{g(0)=1} f(1) = 5 \Rightarrow \text{گزینه (۳)}$$

۶ به پوره دیگه! طراح می‌تونست پیرسه:
 کم ترین مقدار تابع f کدما است؟ جواب: $\frac{31}{8}$
 معادله محور تقارن تابع f کدما است؟ جواب: $x = \frac{1}{4}$
 نمودار تابع f از کدما نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟ جواب: سوم و چهارم

۴ ۳۷۲

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow \text{فرض می‌کنیم } 2x - 3 = t \text{ باشد، بنابراین:}$$

$$\Rightarrow f(2x - 3) = f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$$

۳۷۵

ابتدا ضابطه تابع g را به دست می آوریم. فرض کنیم $f(x) = t$ باشد:

$$2x + 3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2} \Rightarrow g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 2.$$

$$\Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 2 = 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 2.$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده $g(t) = 2t^2 - t + 5$ خواهد شد، که با جای گذاری x به جای t ، ضابطه g به صورت $g(x) = 2x^2 - x + 5$ خواهد شد.

$$f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۳۷۶

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$1) g(f(x)) = 3f(x) + 4 \Rightarrow g(x) = 3x + 4$$

$$2) f(g(x)) = 2g^2(x) + g(x) + 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + x + 1$$

حالا تابع $(f-g)(x)$ را پیدا می کنیم و داریم:

$$y = f(x) - g(x) = (2x^2 + x + 1) - (3x + 4) = 2x^2 - 2x - 3$$

در این سهمی طول رأس برابر $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$ است و کم ترین مقدار آن برابر است با:

$$y_{\min} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} - 1 - 3 = -3\frac{1}{2}$$

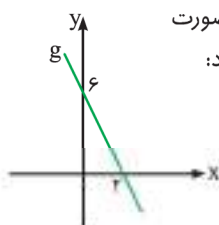
۳۷۷

ابتدا ضابطه تابع gof را مرتب و دسته بندی می کنیم:

$$g(f(x)) = 6 - 3(2x^2 + x) = 6 - 3f(x)$$

پس $g(x) = 6 - 3x$ است و نمودارش به صورت

مقابل است که فقط از ناحیه سوم نمی گذرد:



۳۷۸

با توجه به نمودار صورت سؤال، سهمی fog محور x ها را در دو

نقطه $x=0$ و $x=2$ قطع کرده و نقطه رأس آن $A(1,1)$ است، پس

نقطه $(fog)(x) = -x^2 + 2x$ است. در ضمن تابع خطی g محور x ها را در

نقطه 1 قطع می کند و عرض از مبدأ آن نیز 1 است، پس $g(x) = -x + 1$ است.

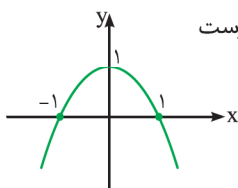
حالا برای پیدا کردن تابع f داریم:

$$g(x) = -x + 1 = t \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow f(g(x)) = -x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f(t) = -(1-t)^2 + 2(1-t) = -t^2 + 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 1$$

با توجه به نمودار تابع f ، فقط عبارت (پ) درست

است.



۳۷۹

واضح است که $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$ است، پس:

$$f(x^2 - x) = (x^4 - 2x^3 + x^2) + 5 = (x^2 - x)^2 + 5$$

حالا به جای $x - x^2$ می توانیم x بگذاریم، یعنی $f(x) = x^2 + 5$ است.

حال عبارت به دست آمده را ساده می کنیم و در انتها به جای t مجدداً x قرار می دهیم:

$$f(t) = 4\left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4}\right) - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

با قرار دادن $x = -3$ در ضابطه $f(2x - 3)$ داریم:

$$f(-3) = 4(-3)^2 - 14(-3) + 13 \Rightarrow f(-3) = 13$$

تنها گزینه ای که با قرار دادن $x = -3$ برابر ۱۳ می شود، گزینه (۴) است.

۳۷۳

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x - 3 = t \Rightarrow x = t + 3 \Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

می توانیم در تابع $f(x-3)$ به جای x عبارت $4-x$

قرار دهیم.

برای عددگذاری در این سؤال ابتدا باید عدد مناسب

را به دست آوریم:

$$x - 3 = 1 - x \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در } f(x-3)} f(2-3) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 \Rightarrow f(-1) = 1$$

با قرار دادن $x = 2$ در ضابطه $f(1-x)$ ، به $f(-1)$ می رسیم و

می دانیم $f(-1) = 1$ است، پس گزینه ای نشان دهنده ضابطه

$f(1-x)$ است که با قرار دادن $x = 2$ در آن، حاصل برابر ۱ شود.

در میان گزینه ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۳۷۴

ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می کنیم:

$$fog(x) = (2x + 1)g(x) + 6x = (2x + 1)(2x - 3) + 6x$$

$$= 4x^2 + 2x - 3$$

حالا با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 + 2x - 3$$

$$\Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t+3}{2}\right) - 3 = (t+3)^2 + (t+3) - 3$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 7t + 9$$

با جای گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x^2 + 7x + 9$

می شود و معادله محور تقارن آن برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$$

۲ ۲۸۴

 بهتر است ابتدا ضابطه دو تابع f و fog را ساده تر کنیم:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

$$fog(x) = \frac{2x}{x+1} = \frac{2x+2-2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$$

 حالا در تابع $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ قرار می دهیم و آن را با ضابطه fog داده شده در صورت سؤال مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2 - \frac{1}{g(x)+1} \\ f(g(x)) = 2 - \frac{2}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{g(x)+1} = \frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow g(x)+1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

۱ ۲۸۵

 ابتدا با کمک اتحاد مربع کامل، ضابطه توابع f و fog را ساده می کنیم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$f(g(x)) = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

 حال در تابع f ، به جای همه x ها، $g(x)$ می گذاریم:

$$f(g(x)) = (g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

 از طرفی در صورت سؤال $f(g(x)) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ است، پس:

$$(g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2$$

$$\begin{cases} g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (x+1) = x^2 - 1 \\ (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (-x) = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

۲ ۲۸۶

 چون ترکیب تابع $f(x)$ با خودش، تابعی خطی است، پس $f(x)$ تابعی خطی بوده و داریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

 با توجه به صورت سؤال $f(f(x)) = 4x - 3$ است، پس:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{\substack{f \text{ نزولی} \\ a < 0}} a = -2$$

$$ab + b = -3 \Rightarrow -2b + b = -3 \Rightarrow -b = -3 \Rightarrow b = 3$$

 پس $f(x) = -2x + 3$ است. حالا با توجه به این که $f(x) = x^2 - x + 3$ است، سراغ پیدا کردن تابع $g(x)$ می رویم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = x^2 - x + 3 \\ f(g(x)) = -2g(x) + 3 \end{cases} \Rightarrow -2g(x) + 3 = x^2 - x + 3$$

$$\Rightarrow -2g(x) = x^2 - x \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

 طول رأس این سهمی برابر $x = -\frac{\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$ و بیشترین مقدار آن برابر است با:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

۴ ۲۸۳

 ابتدا ضابطه $f(\frac{x^2-2}{x}) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$ را مرتب و دسته بندی می کنیم:

$$f(x - \frac{2}{x}) = (x^2 + \frac{4}{x^2} - 4) + (x - \frac{2}{x}) = (x - \frac{2}{x})^2 + (x - \frac{2}{x})$$

 حالا به جای $x - \frac{2}{x}$ می گذاریم x ، ببینید:

۴. به پوره درگله! نمونه های معروف تر و البته ساده تر این سوال رو اینطور مطرح می کنن: «اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ در کدام بازه زیر محور x ها است؟»

۲ ۲۸۱

 در ضابطه $fog(x)$ به جای x عدد ۱ می گذاریم:

$$f(g(1)) = \frac{5(1)-2}{2(1)+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow f(-1) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-1+a}{-1-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow -4a + 4a = -36 \Rightarrow a = 2$$

نکته

یافتن ضابطه تابع درونی یا معلوم بودن تابع مرکب

 در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع f (تابع بیرونی) داده شده و ضابطه تابع g (تابع درونی) یعنی $g(x)$ را می خواهند.

برای حل این مدل سؤالات به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱. در تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ را قرار می دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید.

۲. تابع $f(g(x))$ به دست آمده را مساوی با تابع مرکب fog که در مسئله داده شده، قرار می دهیم و معادله حاصل را بر حسب $g(x)$ حل می کنیم.

۲ ۲۸۲

 با توجه به ماشین داده شده، $g(f(x)) = 2x$ است. حال برای به دست آوردن $f(5)$ یک بار در تابع $(gof)(x)$ به جای x عدد ۵ می گذاریم و یک بار هم در تابع $g(x)$ به جای x ها، $f(5)$ می گذاریم:

$$\begin{aligned} g(f(5)) &= 2 \times 5 = 10 \Rightarrow 2f(5) + 4 = 10 \Rightarrow f(5) = 2 \\ g(f(5)) &= 2f(5) + 4 \end{aligned}$$

۳ ۲۸۳

 ابتدا ضابطه تابع های fog و f را با کمک اتحاد مربع دو جمله ای ساده می کنیم:

$$f(x) = 4(x^2 + 4x + 4) + 2 = 4(x+2)^2 + 2$$

$$fog(x) = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2$$

 حالا در تابع $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ قرار می دهیم و آن را با ضابطه fog در صورت سؤال مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 4(g(x)+2)^2 + 2 \\ f(g(x)) = (x+1)^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow 4(g(x)+2)^2 = (x+1)^2$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow \begin{cases} 2(g(x)+2) = x+1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \times \\ 2(g(x)+2) = -x-1 \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

۴ ۳۸۷

ابتدا دامنه تابع های f و g را تعیین می کنیم:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

حال باید جواب نامعادله $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ را مشخص کنیم:

$$1) \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$2) \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1-x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \xrightarrow{2x^2 \geq 0} 1-x^2 < 0 \Rightarrow 1 < x^2$$

$$\Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \text{ یا } x = 0$$

با توجه به این که اشتراک جواب های به دست آمده از نامعادله برابر

$$D_{gof} = \{x \neq \pm 1 \mid x = 0\} = \{0\} \quad x = 0 \text{ است، پس:}$$

پس گزینه (۱) حذف می شود.

$$g(f(\frac{1}{2})) = g(\frac{5}{3}) = \sqrt{\frac{5}{3} - (\frac{5}{3})^2} = \sqrt{\frac{5}{3}(1-\frac{5}{3})} = \sqrt{-\frac{10}{9}}$$

۱ ۳۹۱

ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می کنیم. از آن جایی که عبارت $x + |x|$

به ازای $x > 0$ برابر $2x$ و به ازای $x \leq 0$ برابر صفر است، پس $D_f = \mathbb{R}$

است. در تابع کسری g نیز مخرج نباید صفر شود، پس $D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

است، بنابراین:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0, \sqrt{x+|x|} \neq 4\}$$

تابع f به ازای $x \leq 0$ برابر صفر و به ازای $x > 0$ برابر $2x$ می شود، پس:

$$D_{gof} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

پس گزینه (۱) درست است.

۴ ۳۹۳

ابتدا دامنه تابع های f و g را تعیین می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x$$

$$g(x) = \log_2(x^2+2x) \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \log_2(x^2+2x) \leq 3\}$$

بنابراین باید جواب نامعادله $\log_2(x^2+2x) \leq 3$ را مشخص کنیم:

$$\log_2(x^2+2x) \leq 3 \Rightarrow x^2+2x \leq 2^3$$

$$\Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

۴ ۳۸۷

نمودار تابع fog محور x ها را در دو نقطه به طول های ۴ و صفر

قطع کرده است و چون نقطه رأس آن $(2, -4)$ است، پس

$fog(x) = x^2 - 4x$ می باشد. در ضمن $f(x) = 2x + 8$ است.

حالا ضابطه تابع g را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2g(x) + 8 \\ f(g(x)) = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow 2g(x) + 8 = x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 8) \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

۱ ۳۸۸

ابتدا دامنه توابع g و f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}; D_f = \mathbb{R} - \{1\}; g(x) = \frac{3x-4}{x+2}; D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -2 \mid \frac{3x-4}{x+2} \neq 1\}$$

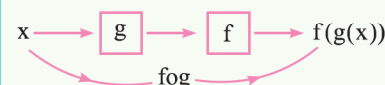
$$= \{x \neq -2 \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{-2, 3\} \Rightarrow a+b = -2+3 = 1$$

به دوره دیکه افراخ می توانست اینطور پیرو:

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و دامنه تابع fog برابر $\mathbb{R} - \{a, b\}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ جواب: $a+b = -2+3 = 1$

یافتن دامنه تابع مرکب

با توجه به نحوه تشکیل تابع fog مشخص است که $g(x)$ به جای مقادیر ورودی تابع f قرار می گیرد، پس دامنه تابع fog به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۲ ۳۸۹

دامنه تابع f برابر $x \leq 5$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. برای پیدا کردن

دامنه تابع fog باید دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$1) x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow x^2 + 4x \leq 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+5) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 1$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم دامنه تابع

fog به صورت بازه $[-5, 1]$ است، پس: $a \times b = -5 \times 1 = -5$

بنابراین دامنهٔ fog برابر می‌شود با:

$$D_{fog} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

توجه: با قرار دادن $x = -2$ در تابع fog عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس $x = -2$ نباید در دامنهٔ تابع باشد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

۱ ۲۹۳

ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} \Rightarrow -x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{x}\right)^x < 2\}$$

می‌دانیم همواره $-1 < \left(\frac{1}{x}\right)^x$ است. پس کفایت نامعادلهٔ $\left(\frac{1}{x}\right)^x < 2$ را حل کنیم:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x < 2 \Rightarrow (x^{-2})^x < 2 \Rightarrow x^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

پس دامنهٔ fog برابر است با:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\} = (-\frac{1}{2}, +\infty)$$

توجه: در تابع fog صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شود. $x = 1$ نیز در تابع fog صدق می‌کند، پس جواب گزینه (۱) است.

۳ ۲۹۴

ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} : 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \mid -1 \leq \tan x \leq 1, \tan x \neq 0 \right\}$$

با توجه به این که $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ است، از $-1 \leq \tan x \leq 1$ و $\tan x \neq 0$

نتیجه می‌گیریم $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ، $x \neq 0$ است، بنابراین دامنهٔ تابع fog به صورت $[-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4}]$ است.

۳ ۲۹۵

در مرحله اول لازم است دامنه توابع f و g را با توجه به $-1 \leq x \leq 3$ به دست آوریم.

$$f(2x+1) = 3x-2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2x \leq 6$$

$$\xrightarrow{+1} -1 \leq 2x+1 \leq 7 \Rightarrow D_f = [-1, 7]$$

$$g(x) = 4x-3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_g = [-1, 3]$$

ضابطه $f(x)$ را هم پیدا کنیم وارد مرحله بعدی می‌شویم:

$$f(2x+1) = 3x-2 \xrightarrow[\substack{2x+1=t \\ x=\frac{t-1}{2}}]{f(t)} = \frac{3t-3}{2} - 2 = \frac{3t-3-4}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3x-7}{2}$$

سپس با توجه به تعریف، دامنه تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \underbrace{\{x \in [-1, 3] \mid -1 \leq 4x-3 \leq 7\}}_I$$

$$(II) \quad -1 \leq 4x-3 \leq 7 \xrightarrow{+3} 2 \leq 4x \leq 10 \xrightarrow{\div 4} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$(I) \cap (II) = [-1, 3] \cap [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] \Rightarrow D_{fog} = [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$$

۲ ۲۹۶

با توجه به شکل صورت سؤال، f تابعی خطی با ضابطهٔ $f(x) = x+2$ و دامنهٔ $[-2, 1]$ است، پس:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{-2 \leq x \leq 1 \mid -2 \leq f(x) \leq 1\}$$

حال نامعادلهٔ $-2 \leq f(x) \leq 1$ را حل می‌کنیم:

$$-2 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $D_{fof} = [-2, -1]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

توجه: به پوره ریگه! طراح می‌توانست همین سؤالو اینجوری بپرسه: «تابع $y = (f \circ f)(x)$ با دامنهٔ $[-2, 1]$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $y = (f \circ f)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟»

۱ ۲۹۷

با توجه به نمودار صورت سؤال $g(x) = -\frac{1}{x}x+2$ و دامنهٔ آن برابر بازهٔ

$[-2, 4]$ است. حالا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}} : \frac{-x^2+6x-8}{-(x-2)(x-4)} > 0 \Rightarrow 2 < x < 4$$

حالا برای پیدا کردن دامنهٔ تابع fog باید هر دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$1) \quad x \in D_g \Rightarrow x \in [-2, 4]$$

$$2) \quad g(x) \in D_f \Rightarrow 2 < -\frac{1}{x}x+2 < 4 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{x}x < 2$$

$$\Rightarrow -4 < x < 0$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم $-4 < x < 0$ است که

شامل دو عدد صحیح -2 و -1 است.

۳ ۲۹۸

برای پیدا کردن بُرد gof، بُرد تابع f یعنی بازهٔ $[-2, 2]$ را به عنوان دامنهٔ تابع g در نظر بگیریم:

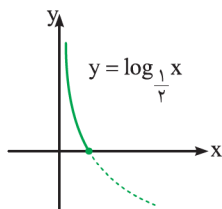
با توجه به نمودار تابع g در بازهٔ $[-2, 2]$ ، بُرد تابع g در این بازه برابر $[-2, 0]$ است که شامل ۳ عدد صحیح 0 ، -1 و -2 است.

۳۵۲ ۱

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x)$$

می‌دانیم $1 \leq \sin x \leq -1$ است، پس $1 \leq \sin^2 x \leq 1$ است. در ضمن چون $\sin^2 x$ جلوی لگاریتم قرار دارد، پس $1 < \sin^2 x \leq 1$ است. حالا به نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ توجه کنید:



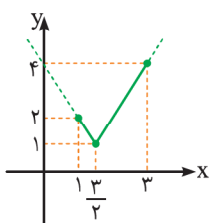
چون در تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x)$ عبارت جلوی لگاریتم در بازه $(0, 1]$ قرار دارد، پس بُرد تابع f در این بازه به صورت بازه $[0, +\infty)$ است.

۳۵۳ ۳

می‌دانیم $1 \leq \sin^2 x \leq 1$ است، پس:

$$1 \leq 2 \sin^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2 \sin^2 x \leq 3$$

حالا باید بُرد تابع f را به ازای ورودی $[1, 3]$ پیدا کنیم:



$$\Rightarrow R_{f \circ g} = [1, 4]$$

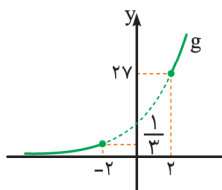
دام‌تستی اگر ابتدا و انتهای بازه $[1, 3]$ رو در تابع f قرار بدی، بُرد تابع $f \circ g$ بازه $[2, 4]$ به دست می‌آید که غلط!

۳۵۴ ۴

می‌دانیم $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ است، پس:

$$f(x) = \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x}$$

در ضمن می‌دانیم مجموع هر عدد حقیقی با معکوسش در بازه $(2, +\infty)$ یا $(-\infty, -2)$ است. حالا باید بُرد تابع g را به ازای ورودی $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ پیدا کنیم:



$$\Rightarrow R_{g \circ f} = (0, \frac{1}{3}] \cup [27, +\infty)$$

۳۵۵ ۵

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

۱ اگر $x > 0$ باشد:

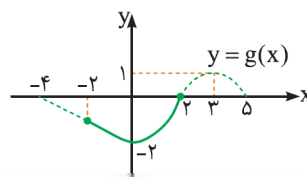
$$x + \frac{1}{x} \leq -2$$

۲ اگر $x < 0$ باشد:

۳۵۶ ۳

به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} x \\ 0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 \\ 3 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 \end{array} \right. \Rightarrow f \circ g = \{(0, 3), (3, -1)\}$$



۳۵۷ ۲

یافتن بُرد تابع مرکب

برای به دست آوردن بُرد تابع مرکب $f \circ g$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ ابتدا بُرد تابع درونی یعنی g را به دست می‌آوریم.
- ۲ بُرد تابع درونی را به عنوان دامنه تابع بیرونی یعنی f در نظر می‌گیریم.
- ۳ سپس بُرد تابع بیرونی را با دامنه جدید به دست می‌آوریم.

۳۵۸ ۲

می‌دانیم $1 < -2x - [2x] \leq 2x$ است. بنابراین

باید بُرد $g(x) = -x^2 + 4x$ را به ازای ورودی $(0, 1)$ به دست آوریم:

$$\rightarrow \text{بُرد تابع } g \text{ } = [0, 3]$$

۳۵۹ ۳

ابتدا ضابطه g را ساده می‌کنیم و سپس تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{-2x-2+3}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

از طرفی می‌دانیم $1 < x - [x] \leq 0$ پس $0 < x - [x] - 1 < -1$ بنابراین:

$$0 < [x] - x + 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 3 \Rightarrow -2 + \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 1$$

پس بُرد تابع $g \circ f$ به صورت $[1, +\infty)$ است.

توجه چون $-1 < [x] - x \leq 0$ است، می‌توانستیم نمودار

تابع $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ را رسم کنیم و بُرد آن را در بازه $(-1, 0)$ به دست آوریم.

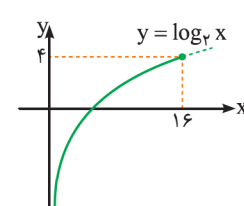
۳۶۰ ۳

دامنه تابع $f(x) = \log_2^x$ برابر $x > 0$ و دامنه تابع $g(x) = \lambda x - x^2$ برابر $\mathbb{R}$ است. حالا دامنه تابع $f \circ g$ را پیدا می‌کنیم:

$$1) x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow \lambda x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \lambda$$

پس دامنه تابع $f \circ g$ برابر بازه $A = (0, \lambda)$ است. بُرد تابع $g(x)$ در بازه $(0, \lambda)$ برابر $(0, 16)$ است. حالا برای پیدا کردن محدوده بُرد تابع $f \circ g$ ، می‌توانیم



نمودار تابع f را در بازه $(0, 16)$ رسم کنیم:

$$\Rightarrow \text{بُرد تابع } f \text{ } = B = (-\infty, 4]$$

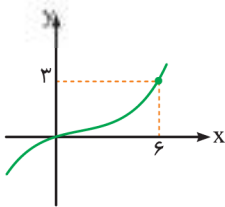
پس $A \cap B = (0, 4]$ است که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

از طرفی دامنه تابع f برابر $[-4, 5]$ است:

$$-4 \leq x+1 \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 4 \quad (2)$$

$$-4 \leq 2-x \leq 5 \Rightarrow -6 \leq -x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 6 \quad (3)$$

از اشتراک ۳ بازه بالا، محدوده x برابر $[-3, 0/5]$ به دست می آید.

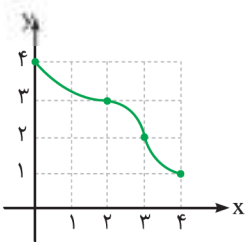


از آن جایی که f تابعی اکیداً صعودی است و از نقطه $A(6, 3)$ می گذرد، نمودار آن را به صورت مقابل فرض می کنیم. با توجه به نمودار، به ازای $x \leq 6$ رابطه $f(x) \leq 3$ برقرار است، پس:

$$f(g(x)) \leq 3 \Rightarrow g(x) \leq 6 \Rightarrow x^2 - x \leq 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

به پوره رنگه! طراح توی همین سوال، میتونست اینجوری پپرسه: «دامنه تابع $y = \sqrt{3 - (50g)(x)}$ کدرا م است؟»



با توجه به این که f تابعی اکیداً نزولی، $D_f = [0, 4]$ و $R_f = [1, 4]$ و $f(3) = 2$ و $f(2) = 3$ نمودار f را به صورت مقابل فرض می کنیم و با توجه به مقادیر تابع داریم:

$$1 \leq f(f(x)) \leq 2 \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس مجموعه نامعادله شامل سه عدد صحیح $x = 0, 1, 2$ است.

تابع f از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y = \sqrt{x} - 2$ و $y = x$ به دست آمده، پس اکیداً صعودی است:

$$f(f(x)) \leq f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \leq \sqrt{x} \Rightarrow x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

از طرفی به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، باید $x \geq 0$ باشد.

حالا دامنه تابع $f \circ f(x)$ را پیدا می کنیم:

$$f(x) \in D_f \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می گیریم $1 \leq x \leq 2$ است که شامل اعداد صحیح $x = 1$ و $x = 2$ می باشد.

برای اینکه رابطه f نمایش دهنده یک تابع باشد، باید در زوج مرتب های $(1, 4)$ و $(1, a^2 + 3a)$ مؤلفه های دوم با هم برابر باشند.

$$a^2 + 3a = 4 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 0 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f} 3 \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 3 \end{cases} \Rightarrow \text{f} \circ \text{f} = \{(0, 3), (1, 0), (3, 1)\}$$

$$c) \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 2 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 4 \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 3 \end{cases} \Rightarrow \text{g} \circ \text{f} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1)\}$$

تابع $f \circ g$ نزولی و توابع f و g غیریکتوا هستند.

$$f(x+2) - f(3-2x) > 0 \Rightarrow f(x+2) > f(3-2x)$$

$$\Rightarrow x+2 > 3-2x \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

از طرفی دامنه تابع f برابر بازه $[-6, 4]$ است:

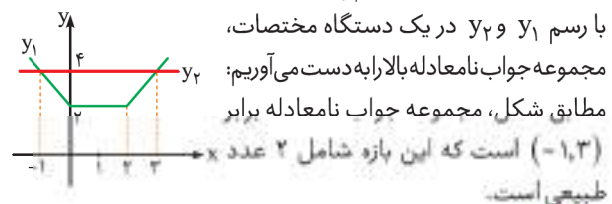
$$-6 < x+2 \leq 4 \Rightarrow -8 < x \leq 2 \quad (2)$$

$$-6 < 3-2x \leq 4 \Rightarrow -9 < -2x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq x < \frac{9}{2} \quad (3)$$

از اشتراک ۳ بازه بالا، عدد x برابر $[\frac{1}{3}, 2]$ به دست می آید که این بازه تنها شامل دو عدد صحیح است.

$$f(4-|x|) - f(|x-2|) > 0 \Rightarrow f(4-|x|) > f(|x-2|)$$

$$\Rightarrow 4-|x| > |x-2| \Rightarrow \underbrace{|x|}_{y_1} < \underbrace{4-|x-2|}_{y_2}$$



با رسم y_1 و y_2 در یک دستگاه مختصات، مجموعه جواب نامعادله بالا را به دست می آوریم: مطابق شکل، مجموعه جواب نامعادله برابر $(-1, 3)$ است که این بازه شامل ۲ عدد طبیعی است.

$$1) f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2) \Rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2 \Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \Rightarrow (2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 2$$

در ضمن چون دامنه تابع مجموعه ای از مقادیر منفی است، پس:

$$2) m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$3) -3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) مجموعه جواب نامعادله برابر $(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}) \cup (2, \frac{1 + \sqrt{21}}{2})$ است که فقط یک مقدار صحیح یعنی $m = -1$ در این بازه قرار دارد.

ابتدا دامنه تابع y را به دست می آوریم:

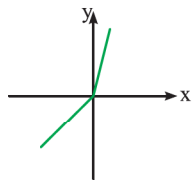
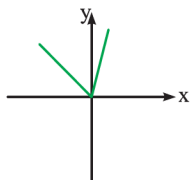
$$f(x+1) - f(2-x) > 0 \Rightarrow f(x+1) > f(2-x)$$

$$\Rightarrow x+1 < 2-x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \quad (1)$$

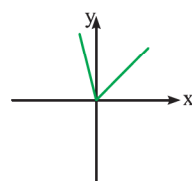
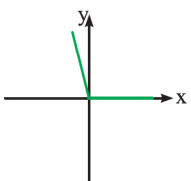
۳۱۶ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$1) y = \begin{cases} 3x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 3x & ; x \geq 0 \\ x & ; x < 0 \end{cases}$$



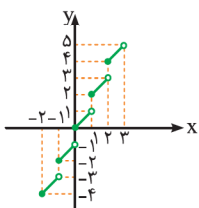
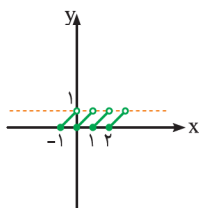
$$3) y = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ -4x & ; x < 0 \end{cases} \quad 4) y = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -3x & ; x < 0 \end{cases}$$



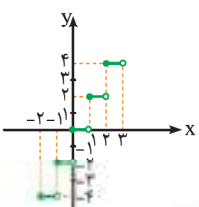
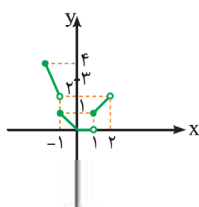
۳۱۷ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$1) y = x - [x] \quad 2) y = x + [x]$$



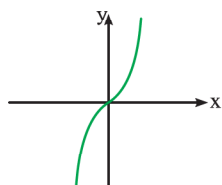
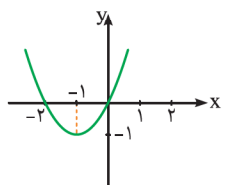
$$3) y = x[x] \quad 4) y = [x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$$



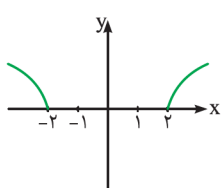
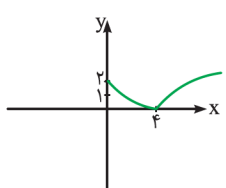
۳۱۸ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$1) y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \quad 2) y = x^3 + 2x$$



$$3) y = |\sqrt{x} - 2| \quad 4) y = \sqrt{|x| - 2}$$



اکنون شرط یک به یک بودن رابطه f را بررسی می‌کنیم:

$$a = 1 \rightarrow f = \{(1, 4), (4, 5), (b, 5)\} \rightarrow b = 4 \Rightarrow b + a = 5$$

$$a = -4 \rightarrow f = \{(1, 4), (4, 5), (b, 5)\} \rightarrow b = 4 \Rightarrow b + a = 0$$

مثالیت

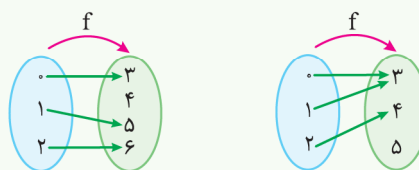
تابع یک به یک

اگر در یک رابطه تشکیل شده از زوج مرتب‌ها، به صورت (x, y) ،

به ازای هر x ، فقط یک y داشته باشیم، آن رابطه یک تابع است.

هم‌چنین اگر در تابع، به ازای هر y ، فقط یک x داشته باشیم، به این

تابع، یک به یک گویند.



تابع است و یک به یک نیست. تابع یک به یک است.

اگر تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به شکل (x, y) باشد،

به شرطی یک به یک است که هیچ دو x مختلفی دارای y یکسان نباشند.

مثلاً تابع $f = \{(1, 2), (3, 0), (4, 2)\}$ یک به یک نیست، زیرا دو زوج

مرتب $(1, 2)$ ، $(4, 2)$ دارای مؤلفه دوم یکسان هستند.

نمودار تابع f به شرطی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها،

نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، یک به یک هستند.

۳۱۹ ۴

می‌دانیم برای اینکه یک تابع، یک به یک باشد، باید هر خط افقی، نمودار

تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

در بین گزینه‌ها، تنها نمودار تابع گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۳۱۵ ۲

به بررسی همه گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = -x$ را در نظر بگیرید. هر دو

تابع $f(x)$ و $g(x)$ یک به یک هستند، اما مجموع آنها یعنی

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - x = 0$ یک تابع غیر یک به یک است.

(۲) می‌دانیم برای اینکه تابع یک به یک باشد، باید تعداد اعضای دامنه

و برد با هم برابر باشند، بنابراین تابع با دامنه ۳ عضوی و برد ۲ عضوی،

قطعاً غیر یک به یک است.

(۳) تابع یک به یک $f(x) = x$ را در نظر بگیرید. اگر $k = 2$ باشد،

$f^2(x) = x^2$ تابعی یک به یک نیست.

(۴) وقتی $|f|$ یک به یک است، یعنی قدرمطلق هیچ دو اندازه تابعی

با هم برابر نشده است. بنابراین خود تابع f نیز حتماً یک به یک بوده

است.

حاصل $f(3/5)$ برابر است با:

$$\begin{cases} f(3/5) = 2(3/5) + 1 = 8 \\ f(3/5) = 2(3/5) - 1 = 6 \end{cases}$$

بنابراین حداکثر مقدار $f(3/5)$ برابر ۸ است.

۱ ۳۳۳

با توجه به تابع f ، حالت پیش می‌آید:

حالت ۱ تابع f خطی باشد یعنی $a = 0$ باشد:

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = -2x + 3 \quad (I)$$

و می‌دانیم که توابع خطی در $x \in \mathbb{R}$ یک به یک هستند.

حالت ۲ تابع f درجه ۲ باشد، بنابراین بازه $(-2, -1)$ باید بعد از طول رأس سهمی باشد یا قبل از آن.

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(a+2)}{2a} = \frac{a+2}{2a}$$

$$\begin{cases} 1) \frac{a+2}{2a} \geq -1 \rightarrow \frac{a+2+2a}{2a} \geq 0 \rightarrow \frac{3a+2}{2a} \geq 0 \\ \frac{a}{\frac{3a+2}{2a}} \quad + \quad \frac{-2}{\frac{3a+2}{2a}} \quad - \quad \text{نقطه} \quad + \\ \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{2}{3} \cup a > 0 \quad (II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2) \frac{a+2}{2a} \leq -2 \rightarrow \frac{a+2+4a}{2a} \leq 0 \rightarrow \frac{5a+2}{2a} \leq 0 \\ \frac{a}{\frac{5a+2}{2a}} \quad + \quad \frac{-2}{\frac{5a+2}{2a}} \quad - \quad \text{نقطه} \quad + \\ \leq 0 \rightarrow -\frac{2}{5} \leq a < 0 \quad (III) \end{cases}$$

از اجتماع ۳ مقدار به دست آمده برای a حدود آن به دست می‌آید:

$$x \quad a \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [-\frac{2}{5}, +\infty)$$

۲ ۳۳۴

در توابع هموگرافیک به شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر صورت و مخرج پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست.

این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad - bc = 0$ باشد.

$$f(x) = \frac{2x+b}{x+3+b} \rightarrow (2)(3+b) - (b)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 2b - b = 0 \Rightarrow b = -6$$

۲ ۳۳۵

اگر تابع $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، در آن صورت غیر یک به یک است. بنابراین باید ضریب x در تابع $f(x)$ برابر صفر شود:

$$f(x) = 2x + m^2x - 3mx + 1 = (m^2 - 3m + 2)x + 1$$

$$\rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

۲ ۳۳۶

نمودار تابع f بدون در نظر گرفتن مقدار a به صورت مقابل است:



$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \leq 1 \\ x + a & ; x > 1 \end{cases}$$

با توجه به شکل، a می‌تواند دو مقدار طبیعی ۱ و ۲ را اختیار کند.

۱ ۳۳۹

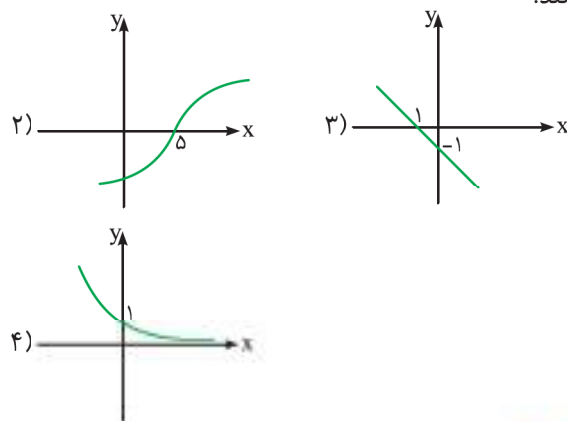
می‌دانیم تابع یک به یک، هر خط افقی $y = k$ را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند.

با بررسی گزینه (۱) داریم:

$$x^3 - 4x + 1 = k \xrightarrow{k=1} x^3 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow x^3 - 4x = 0$$

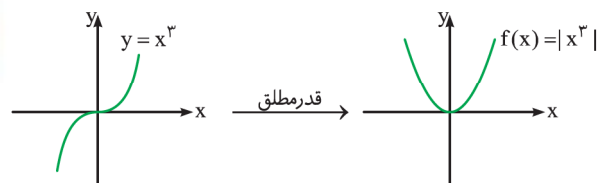
$$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

چون تابع موجود در گزینه (۱)، خط افقی $y = 1$ را در ۳ نقطه قطع کرده، بنابراین تابع یک به یک نیست. باقی گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع یک به یک هستند.



۳ ۳۴۰

ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار تابع f ، غیر یکوا است. از طرفی چون خطی موازی محور x ‌ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند (مثلاً خط $y = 1$) پس تابع یک به یک نیست و در نتیجه وارون ناپذیر است.

۲ ۳۴۱

مجموع دو تابع اکیدا صعودی، خود یک تابع اکیدا صعودی و یک به یک است. توابع موجود در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) از جمع دو تابع اکیدا صعودی به دست آمده‌اند. بنابراین یک به یک و وارون پذیراند. تابع موجود در گزینه (۲)، مجموع یک تابع صعودی و یک تابع نزولی است.

و نقاط $(0, 1)$ و $(-1, 1)$ با عرضی یکسان روی آن واقع شده‌اند، بنابراین یک به یک و وارون پذیر نیست.

۳ ۳۴۲

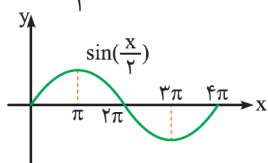
می‌دانیم توابع درجه دو، توابعی غیر یک به یک هستند. برای اینکه تابع $f(x)$ یک تابع یک به یک باشد، باید ضریب x^2 برابر صفر شود:

$$f(x) = m^2x^2 + 2x - x^2 + m = f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2x + m$$

$$\rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ f(x) = 2x - 1 \end{cases}$$

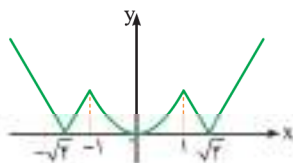
۳۳۳۳

مطابق شکل، تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{4})$ با دوره تناوبی $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ و بازه‌های $(0, \pi)$ ، $(\pi, 2\pi)$ ، $(2\pi, 3\pi)$ ، $(3\pi, 4\pi)$ یک‌به‌یک است. بنابراین گزینه (۴) پاسخ سوال است.



۳۳۳۴

ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم: مطابق شکل، تابع f در بازه $[-\sqrt{2}, -1]$ یک‌به‌یک است.

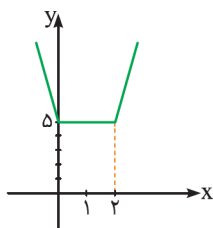


۳۳۳۵

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

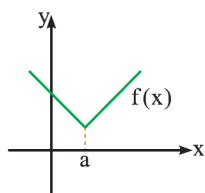
$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & ; x > 2 \\ 5 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ -4x + 5 & ; x < 0 \end{cases}$$

مطابق نمودار، تابع در بازه $[0, 2]$ یک‌به‌یک نیست که این بازه، شامل ۳ عدد صحیح است.



۳۳۳۶

برای اینکه تابع f در بازه $[1, 5]$ وارون پذیر باشد، باید در این بازه یک‌به‌یک باشد، بنابراین مقدار a نباید در بازه $[1, 5]$ قرار بگیرد:



$$\begin{cases} a \geq 5 \\ \text{یا} \\ a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty) \Rightarrow a \in \mathbb{R} - (1, 5)$$

۳۳۳۷

برای به دست آوردن دامنه تابع f ، ابتدا ریشه‌های مخفی را به دست می‌آوریم:

$$g(x) - g(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow g(x) = g(x^2 - 3)$$

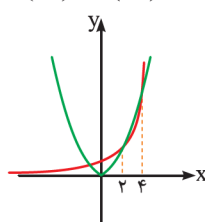
تابع g یک‌به‌یک است $\Rightarrow x = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$

معادله بالا، دارای ۲ ریشه است. بنابراین دامنه تابع f ، شامل ۲ عدد حقیقی نمی‌باشد.

۳۳۳۸

چون تابع f یک تابع یک‌به‌یک است، پس داریم:

$$f(2^x) = f(x^2) \Rightarrow 2^x = x^2$$



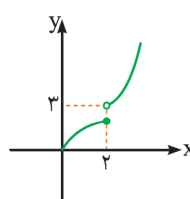
می‌دانیم معادله بالا، دارای دو جواب مثبت $x=2$ و $x=4$ است.

۳۳۳۹

ابتدا نمودار تابع f را بدون در نظر گرفتن مقدار a رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & ; x > 2 \\ \sqrt{x-a} & ; a \leq x \leq 2 \end{cases}$$

با توجه به شکل، حداقل مقدار a زمانی اتفاق می‌افتد، که مقدار تابع $y = \sqrt{x-a}$ در $x=2$ برابر ۳ شود:



$$x=2 : \sqrt{2-a} = 3 \Rightarrow 2-a = 9 \Rightarrow a = -7$$

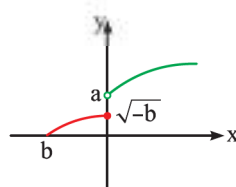
۳۳۴۰

مقدار تابع $y = 4x + 1$ در $x=k$ باید کمتر از مقدار تابع $y = x - 5$ در $x=k$ باشد:

$$x=k : 4k + 1 < k - 5 \Rightarrow 3k < -6 \Rightarrow k < -2$$

۳۳۴۱

ابتدا بدون توجه به علامت و مقدار a ، تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

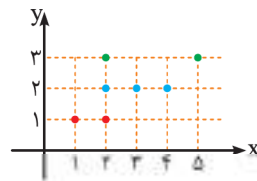
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-b} & ; b \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x+a} & ; x > 0 \end{cases}$$


در نقطه $x=0$ ، مقدار تابع برابر $\sqrt{-b}$ است. پس $-b \geq 0$ و در نتیجه $b \leq 0$ است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

همچنین مطابق شکل، باید a مقداری مثبت داشته باشد تا تابع $f(x)$ یک تابع یک‌به‌یک شود. بنابراین گزینه (۱) می‌تواند پاسخ سوال باشد.

۳۳۴۲

برای اینکه نمودار یک‌به‌یک باشد، باید روی هر خط افقی، حداکثر یک نقطه بماند.



پس باید از میان نقاط سبز یک نقطه، از میان نقاط آبی دو نقطه و از میان نقاط قرمز یک نقطه حذف کنیم. پس باید حداقل ۴ نقطه حذف کنیم.

۳۳۴۳

طول رأس سهمی برابر $x_S = \frac{-(-16)}{2(2)} = 4$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 4]$ و $[4, +\infty)$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه، یک‌به‌یک است. بنابراین گزینه (۴) پاسخ سوال است.

۳۳۴۴

ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = (2x+1)^2 + 2(3x-1) - 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 6x - 2 - 3 \Rightarrow f(x) = 4x^2 + 10x - 4$$

طول رأس این سهمی برابر $x_S = \frac{-10}{2(4)} = -1.25$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, -1.25]$ و $[-1.25, +\infty)$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه یک‌به‌یک است. بنابراین بیشترین مقدار m ، برابر -1.25 است.

۲۲

چون نمودار تابع $f^{-1}(x)$ همواره پایین محور x ها است، پس $f^{-1}(x) < 0$ است. بنابراین باید مخرب کسر نیز منفی باشد.

همواره منفی

$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow x - f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow x < f^{-1}(x)$$

با توجه به شکل، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ در بازه $(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2})$ بالاتر از نمودار تابع $y = x$ قرار دارد؛ که این بازه شامل ۴ عدد صحیح $x = -6, -5, -4, -3$ است.

۲ ۳۴۴

چون g وارون f است، پس باید $f^{-1}(12) - f^{-1}(4) = 4$ را به دست آوریم. می توانیم تابع f را یک بار برابر ۴ و یک بار برابر ۱۲ بگذاریم:

$$\begin{cases} -x + \sqrt{-2x} = 4 \Rightarrow x = -2 \\ -x + \sqrt{-2x} = 12 \Rightarrow x = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4) - f^{-1}(12) = (-2) - (-8) = 6$$

هایلایت

برای محاسبه $f^{-1}(a)$ می توانیم ضابطه تابع f را برابر عدد a قرار دهیم و یک معادله حل کنیم.

۴ به پوره دیگه! طراح درکنکور تهری خارج ۹۹ این سوال رو اینجوری پرسید:

فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(15) + g(3)$ کدام است؟ جواب:

$$\begin{aligned} g(3) &= f^{-1}(3) = 1 \\ g(15) &= f^{-1}(15) = 9 \end{aligned} \xrightarrow{\text{مجموع}} 1 + 9 = 10$$

۳ ۳۴۵

چون $g(1) = f^{-1}(1)$ است، پس:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = 1 \xrightarrow{x \geq 1} x = 4 \Rightarrow g(1) = 4$$

حال مقدار $g(4)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = 4 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow g(4) = 9 \Rightarrow g(g(1)) = 9$$

۴ به پوره دیگه! طراح ممکن بود اینجوری بپرسد:

اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |\sqrt{x} - 1|$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow g(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

در میان گزینه ها، نمودار تابع $y = x^3 - x + 1$ از نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ می گذرد:

$$y = (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 4 + 8}{8} = \frac{5}{8}$$

پس وارون این تابع از نقطه $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ می گذرد.

هایلایت

اگر نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی نمودار تابع f^{-1} است (و برعکس).

۳۳ ۳۴۶

چون نقطه $A(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5})$ روی تابع وارون قرار دارد، پس نقطه $A'(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{8})$ روی خود تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ قرار دارد:

$$-\frac{1}{8} = \frac{-\frac{3}{5}}{a + a|-\frac{3}{5}|} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{\frac{3}{5}}{a + \frac{3}{5}a} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{3}{\frac{8}{5}a} \Rightarrow a = 3$$

۱ ۳۴۹

با توجه به نمودار، $f(-3) = 5$ و $f(2) = 0$ است، پس:

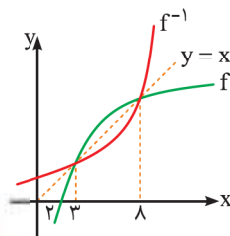
$$\begin{cases} f^{-1}(5) = -3 \\ f^{-1}(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{f^{-1}(5)}{f(a) + f^{-1}(0)} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-3}{f(a) + 2} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(a) + 2 = 4 \Rightarrow f(a) = 2 \xrightarrow{f(0)=2} a = 0$$

۴ ۳۵۲

عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$



با توجه به نمودار مقابل، بازه ای که در آن مقادیر $y = f^{-1}(x)$ کمتر یا مساوی مقادیر $y = x$ باشد، برابر بازه $[3, 8]$ است.

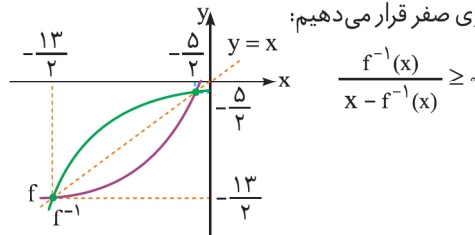
هایلایت

برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

۳۳ ۳۵۳

با توجه به این که نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه اند، پس نمودار تابع f^{-1} را به صورت زیر رسم می کنیم.

حالا برای پیدا کردن دامنه تابع خواسته شده، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم:



۳۳۵۴

مطابق شکل، نقاط $(-2, 2), (0, 3)$ روی نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ قرار دارند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$(-2, 2) \Rightarrow f(2 \times -2 - 1) = 2 \Rightarrow f(-5) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = -5$$

$$(0, 3) \Rightarrow f(2 \times 0 - 1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(2) + f^{-1}(3)}{f(-5)} = \frac{(-5) + (-1)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

۳۳۵۵

ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطه توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2; & x \leq 0 \\ -x + 2; & x > 0 \end{cases}, g(x) = -2x - 2$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید ضابطه پایینی تابع f را برابر -2 قرار دهیم:

$$-x + 2 = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 4$$

پس ساده‌شده عبارت مورد نظر برابر است با:

$$g(f^{-1}(-2)) + g^{-1}(f(-1)) = g(4) + g^{-1}(4)$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(4)$ داریم:

$$g(x) = -2x - 2 = 4 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow g^{-1}(4) = -3$$

$$\Rightarrow g(4) + g^{-1}(4) = (-1 \cdot 0) + (-3) = -13$$

۳۳۵۱

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به دست می‌آوریم:

$$1 \cdot y - x = -1 \xrightarrow{y=1} 1 \cdot 0 - x = -1 \Rightarrow x = 2 \cdot 0$$

پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(2, 0)$ است و این نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(2 \cdot 0) = 1$ است. داریم:

$$f^{-1}(2 \cdot 0) = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 0 \Rightarrow (1)^3 + 6(1)^2 + a(1) + 1 = 2 \cdot 0 \Rightarrow a = 12$$

۳۳۵۲

چون وارون تابع f خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض $1 \cdot 0$ قطع می‌کند، پس:

$$y = 12 - x \xrightarrow{y=1 \cdot 0} 1 \cdot 0 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 1 \cdot 0) \in f^{-1}$$

در نتیجه $(1 \cdot 0, 2) \in f$ است، پس:

$$f(1 \cdot 0) = 2 \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 0 - 2\sqrt{1 \cdot 0} \cdot m - 1} = 2 \Rightarrow 1 \cdot 0 - 2\sqrt{1 \cdot 0} \cdot m - 1 = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 \cdot 0 \cdot m - 1} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x} - 1}$$

$$\Rightarrow f(m + 4) = f(5) = 1$$

۳۳۵۳

نقطه $(a, -1)$ روی خط $y = x - 4$ است، بنابراین:

$$y = x - 4 \xrightarrow{(a, -1)} -1 = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

۳۳۵۶

ابتدا ضابطه $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x - 1) = \log_3(x + 1) \xrightarrow{x \rightarrow x+1} f(x) = \log_3(x + 2)$$

حالا سراغ محاسبه $f^{-1}(g(4))$ می‌رویم. چون $g(4) = 2 \cos 2\pi = 2$ است، پس باید $f^{-1}(2)$ را پیدا کنیم:

$$f(x) = 2 \Rightarrow \log_3(x + 2) = 2 \Rightarrow x + 2 = 9 \Rightarrow x = 7$$

پس $f^{-1}(2) = 7$ است.

یه پوره دیگه! همین سوالو با یک تابع نمایی هم ببینیم: «اگر $f(x-1) = 2^{3x-4} + 1$ و $g(x) = 2 \cos(\frac{\pi x}{4})$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g(4)$ کدام است؟» که جوابش برابر است با:

$$f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(2) = \frac{1}{3}$$

۳۳۵۷

می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{2}{5}) + g^{-1}(-\frac{2}{5})$ را پیدا کنیم. با فرض

$$f(-\frac{2}{5}) = a \text{ و } g^{-1}(-\frac{2}{5}) = b \text{ داریم:}$$

$$1) f^{-1}(a) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{a}{1+|a|} = -\frac{2}{5} \xrightarrow{a < 0} \frac{a}{1-a} = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5a = -2 + 2a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3}$$

$$2) g(b) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} - 1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow b = \frac{9}{25} \Rightarrow g^{-1}(-\frac{2}{5}) = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow (f + g^{-1})(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \frac{-50 + 27}{75} = -\frac{23}{75}$$

یه پوره دیگه! در آزمون مهرداد ۱۴۰۰ طرح اینثوری پرسید: «اگر $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، حاصل $f^{-1}(\frac{5}{9}) + f^{-1}(-\frac{3}{4})$ کدام است؟»

$$\text{جواب: } 1 - \frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{1}{2}$$

۳۳۵۸

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید در تابع $f(x) = \begin{cases} 6 - 2x; & x < 2 \\ 4 - x; & x \geq 2 \end{cases}$ ضابطه پایینی را برابر -2 بگذاریم:

$$4 - x = -2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 6$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(-5)$ باید در تابع $g(x) = \begin{cases} 2x - 3; & x < 0 \\ x - 4; & x \geq 0 \end{cases}$ ضابطه بالایی را برابر -5 بگذاریم:

$$2x - 3 = -5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g^{-1}(-5) = -1$$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$f(g^{-1}(-5)) + g(f^{-1}(-2)) = f(-1) + g(6) = 8 + 2 = 10$$

پس نقطه $(-1, 3)$ روی وارون تابع f قرار دارد، در نتیجه نقطه $(-1, 3)$ روی تابع f است.

$$f(x) = x^2 + \sqrt{b - ax} \xrightarrow{a=3} f(x) = x^2 + \sqrt{b - 3x}$$

$$f(-1) = 3 \Rightarrow 3 = 1 + \sqrt{b - 3(-1)} \Rightarrow 2 = \sqrt{b + 3}$$

$$\Rightarrow 4 = b + 3 \Rightarrow b = 1$$

مقدار $a - b$ برابر است با: $a - b = 3 - 1 = 2$

چون $f^{-1}(g(a)) = 6$ است، پس $f(6) = g(a)$ است. در ضمن

$f(6) = 7$ است، پس:

$$g(a) = 7 \xrightarrow{(f, Y) \in g} a = 4$$

در تابع f داریم، $f(\frac{1}{f}) = -3$ و با توجه به این که $f(g^{-1}(a)) = -3$

می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-1}(a) = \frac{1}{f}$ بنابراین:

$$g^{-1}(a) = \frac{1}{f} \Rightarrow g(\frac{1}{f}) = a$$

ضابطه $g(x) = -|x| \sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$g(\frac{1}{f}) = -(\frac{1}{f}) \times \frac{1}{f} = -\frac{1}{f^2}$$

چون $f^{-1}(g^{-1}(a)) = 8$ است، پس $f(8) = g^{-1}(a)$ است. از طرفی

برای پیدا کردن $f(8)$ ، باید به سراغ ضابطه بالایی تابع f برویم:

$$x \geq 3: f(x) = \sqrt{5x + 9} \xrightarrow{x=8} f(8) = \sqrt{5 \times 8 + 9} = 7$$

بنابراین $g^{-1}(a) = 7$ است، یعنی $g(7) = a$ است. با توجه به تابع g نتیجه می‌گیریم $a = 3$ است.

چون $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، پس $g(2a) = f(6)$ است، بنابراین با

توجه به تابع‌های f و g داریم:

$$g(2a) = f(6) \xrightarrow{f(6)=3} g(2a) = 3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3$$

$$\Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

فرض می‌کنیم $\alpha = (g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda)$ باشد، پس:

$$g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = f^{-1}(\lambda) \quad (1)$$

حال برای محاسبه $f^{-1}(\lambda)$ ضابطه f را برابر λ می‌گذاریم:

$$\lambda = \frac{2}{5}x - 4 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = 30$$

بنابراین از (1) داریم:

$$g(\alpha) = f^{-1}(\lambda) = 30 \Rightarrow \alpha^3 + \alpha = 30 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = 3$$

۳۵۹

ابتدا $f^{-1}(20)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

پس $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$ است، پس ضابطه g را برابر 16 می‌گذاریم:

$$\frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow 9x+6 = 16-16x \Rightarrow 25x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

۳۶۰

می‌دانیم $f(g^{-1}(-1)) = -\frac{11}{3}$ است. پس ابتدا ضابطه تابع f را برابر

$-\frac{11}{3}$ می‌گذاریم:

$$\frac{2x+1}{3} = -\frac{11}{3} \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = -6$$

پس $f(-6) = -\frac{11}{3}$ است، بنابراین $g^{-1}(-1) = -6$ است. یعنی $g(-6) = -1$ است:

$$g(-6) = \frac{-12+a}{a+6} = -1 \Rightarrow -12+a = -a-6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۳۶۱

$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$ است. حالا خواهیم داشت:

$$x = 2: \frac{g(2)}{g(f^{-1}(2))} = \frac{g(2)}{g(1)} \Rightarrow x$$

$$x = 5: \frac{g(5)}{g(f^{-1}(5))} = \frac{g(5)}{g(2)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = 4: \frac{g(4)}{g(f^{-1}(4))} = \frac{g(4)}{g(3)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x = 6: \frac{g(6)}{g(f^{-1}(6))} = \frac{g(6)}{g(4)} \Rightarrow x$$

پس تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ به صورت $\{(5, 2), (4, 2)\}$ است.

۳۶۲

$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$ است. حالا خواهیم داشت:

$$x = 1: g^{-1}(f(1)) - f(1) = g^{-1}(2) - f(1) = 4 - 2 = 2$$

$$x = 2: g^{-1}(f(2)) - f(2) = g^{-1}(5) - f(2) \Rightarrow x$$

$$x = 3: g^{-1}(f(3)) - f(3) = g^{-1}(4) - f(3) \Rightarrow x$$

$$x = 4: g^{-1}(f(4)) - f(4) = g^{-1}(6) - f(4) = 5 - 6 = -1$$

پس برد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ برابر $\{2, -1\}$ است.

۳۶۳

ابتدا مقدار $g(2)$ را به دست می‌آوریم، پس ضابطه g^{-1} را برابر 2 قرار می‌دهیم:

$$1 - x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g(2) = -1$$

پس $f(g(2)) = f(-1)$ است و داریم:

$$f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x} \xrightarrow{x=-2} f(-1) = \frac{g(-2)-1}{-2}$$

۳۷۵ ۱

نمودار هر تابع (به شرط وارون پذیر بودن) و وارون آن نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. پس باید وارون تابع خطی داده شده را به دست آوریم. بنابراین کافی است جای x و y را عوض کنیم تا معادله خط d به دست آید: $3x - 2y = 4 \Rightarrow 3x - 2y = 4 \xrightarrow{\text{تعويض جای } x \text{ و } y} 3y - 2x = 4 \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ } x=0} y = -2$

می‌توانیم بدون محاسبه تابع وارون، در معادله خط اولیه به جای y صفر بگذاریم.

۳۷۱ ۴

برای پیدا کردن ضابطه وارون f ، نحوه تشکیل تابع f را بررسی می‌کنیم.

$$f: (-3) \rightarrow (\div 2) \quad f^{-1}: (+3) \leftarrow (x2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x + 3 \xrightarrow{\text{به پایین واحد ۶}} y = 2x + 3 - 6$$

حالا نقطه برخورد تابع حاصل را با تابع f پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x-3}{2} = 2x - 3 \Rightarrow x - 3 = 4x - 6 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow A(1, -1) \Rightarrow OA = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

توجه

برای وارون کردن توابعی که در ضابطه آن‌ها یک x وجود دارد، یک راهکار جالب و سریع این است که ابتدا نحوه تشکیل تابع f را پیدا کنید. سپس برای پیدا کردن ضابطه وارون تابع، اعمال را به طور برعکس و از آخر به اول روی x انجام دهید. در جدول زیر، تعدادی از این اعمال و برعکس آن‌ها آورده شده:

+	-
$\times$	$\div$
توان ۲	$\sqrt{\quad}$
توان ۳	$\sqrt[3]{\quad}$
a^x	$\log_a x$

۳۷۲ ۳

با توجه به تابع $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ داریم:

$$f: (x \frac{2}{3}) \rightarrow (+2) \Rightarrow f^{-1}: (+\frac{2}{3}) \leftarrow (-2)$$

پس $f^{-1}(x) = \frac{3x-6}{2}$ است. حالا معادله f^{-1} را مرتب می‌کنیم و فاصله نقطه $A(7, 1)$ را از آن پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{3x-6}{2} \Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|21 - 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

حالا برای به دست آوردن $g(-2)$ ، تابع g^{-1} را برابر -2 قرار می‌دهیم:

$$1 - x = -2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g(-2) = 3 \\ \Rightarrow f(-1) = \frac{g(-2)-1}{-2} = \frac{3-1}{-2} = -1$$

۳۷۳ ۱

فرض می‌کنیم $g^{-1}(3) = a$ باشد، پس $g(a) = 3$ است. حالا در ضابطه $f \circ g$ به جای x ها، a قرار می‌دهیم:

$$f(g(a)) = a^3 g(a) + f(g(a)) \xrightarrow{g(a)=3} f(3) = 3a^3 + 4 \times 3$$

از طرفی با توجه به ضابطه تابع f داریم:

$$f(3) = 3^2 + 4(3) + 15 = 36$$

$$\Rightarrow 3a^3 + 12 = 36 \Rightarrow 3a^3 = 24 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس $g^{-1}(3) = a = 2$ است.

۳۷۵ ۳

چون $f^{-1}(2^x - 14) = x^2 + 2x$ است، پس $f(x^2 + 2x) = 2^x - 14$ است و با جای گذاری $x = 4$ مقدار $f^{-1}(2)$ به دست می‌آید:

$$x = 4: f^{-1}(2^4 - 14) = 4^2 + 2 \times 4 \Rightarrow f^{-1}(2) = 12$$

۳۷۶ ۴

چون $f^{-1}(\frac{x+2}{x-1}) = x^2 - 1$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$f(x^2 - 1) = \frac{x+2}{x-1} \text{ است. حال چون } f(7) \text{ را می‌خواهیم، پس داریم:}$$

$$x^2 - 1 = 7 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین با جای گذاری $x = 2$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(2^2 - 1) = \frac{2+2}{2-1} \Rightarrow f(7) = 4$$

۳۷۷ ۴

برای پیدا کردن نقطه برخورد $f^{-1}(x)$ و نیمساز ناحیه دوم یعنی $y = -x$; $x < 0$ از ویژگی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

۳۷۸ ۲

با فرض $g^{-1}(6) = a$ داریم:

$$g(a) = 6 \Rightarrow f(a) + \sqrt{f(a)} = 6 \Rightarrow f(a) = 4$$

حال چون $f^{-1}(x)$ داده شده، پس می‌توانیم از $f(a) = 4$ نتیجه بگیریم $f^{-1}(4) = a$ است:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{x=4} a = f^{-1}(4) = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow g^{-1}(6) = 2$$

۳۷۹ ۴

با فرض $g^{-1}(16) = a$ داریم:

حال از $f(3a-4) = 16$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(16) = 3a-4$ است و خواهیم داشت:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} 3a-4 = f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20$$

$$\Rightarrow a = 8$$

بنابراین $g^{-1}(16) = 8$ است.

۳۷۷ ۱

 نحوه تولید تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ به صورت زیر است:

 پس $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$ است. در ضمن بُرد تابع f بازه $(-\infty, 2]$ است. پس دامنه تابع f^{-1} نیز برابر همین بازه است.

 چون $f(5) = 0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 5$ باشد. فقط گزینه (۱) این ویژگی را دارد.

۳۷۸ ۳

 ابتدا نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم، یعنی آن را وارون می‌کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازه $[2, +\infty)$ است:


$$\Rightarrow y^{-1} = (x-2)^2 + 1; x \geq 2$$

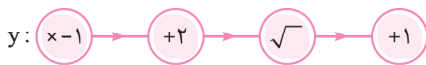
حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

$$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{واحد راست}]{x \rightarrow (x-2)} y = (x-4)^2 + 1$$

$$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{واحد ۳}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3$$

 پس $g(x) = (x-4)^2 - 2$ است و $g(4) = -2$ است.

۳۷۹ ۳

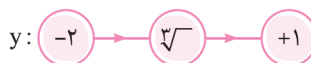
 با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ است. پس $a = 2$ و $b = 1$ می‌باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، به تابع $y = 1 + \sqrt{-x+2}$ می‌رسیم که بُرد آن به صورت بازه $[1, +\infty)$ است. حالا نمودار حاصل را وارون می‌کنیم:


$$\Rightarrow y^{-1} = 2 - (x-1)^2; x \geq 1$$

 در نتیجه $g(x) = 2 - (x-1)^2$ است و داریم:

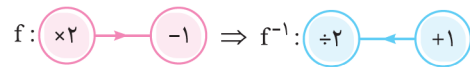
$$g(a+b) = g(2+1) = 2 - (3-1)^2 = 2 - 4 = -2$$

۳۸۰ ۴

 وقتی نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ می‌رسیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می‌کنیم:


$$y^{-1}: +2 \leftarrow 3 \text{ توان } \leftarrow -1 \Rightarrow y^{-1} = (x-1)^3 + 2$$

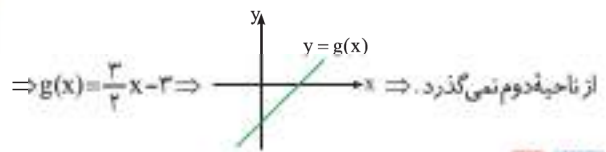
۳۷۳ ۲

 با توجه به تابع $f(x) = 2x - 1$ داریم:

 بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ است و داریم:

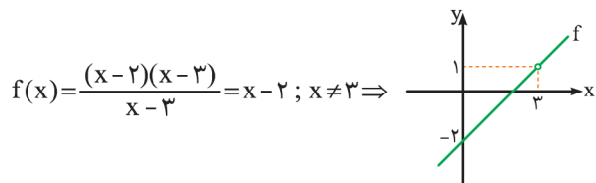
$$g(x+1) = f(x) - f^{-1}(x) = 2x - 1 - \frac{x+1}{2} = \frac{3x-3}{2}$$

 حالا در تابع $g(x+1)$ به جای x ها $x-1$ قرار می‌دهیم تا به تابع $g(x)$ برسیم.

$$g(x+1) = \frac{3x-3}{2} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} g(x) = \frac{3(x-1)-3}{2} = \frac{3x-6}{2}$$



۳۷۴ ۴

 ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

 عدد ۱ در محدوده بُرد تابع f وجود ندارد، پس: $f^{-1}(x) = x+2$; $x \neq 1$

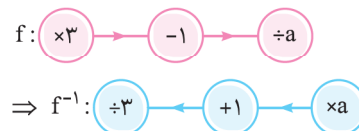
۳۷۵ ۲

 چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن اند، پس وارون یکی از آن‌ها با دیگری برابر است. بنابراین در خط $2x - 3y = b$ جای x و y را عوض می‌کنیم تا وارون آن یعنی $2y - 3x = b$ به دست آید. پس $2y - 3x = b$ و $ax + by = 8$ برابرند، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \frac{a}{-3} = \frac{b}{2} \Rightarrow ab = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

۳۷۶ ۲

 با توجه به تابع $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ داریم:

 بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{3}$ است. حالا $f(f^{-1}(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{ax+1}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{ax+1}{3}\right)-1}{a} = \frac{3ax+2}{a} = 3x + \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{2}{a} = 3x + 5 \Rightarrow \frac{2}{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$f: \begin{array}{c} -1 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow x-1 \rightarrow +1 \\ f^{-1}: \begin{array}{c} +1 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow \div -1 \rightarrow -1 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$$

وقتی نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$; $x \geq 1$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، باید به جای همه x ها، $-x$ قرار دهیم. پس ضابطه آن پس از قرینه نسبت به محور y ها به صورت زیر است:

$$y = x^2 + 2x; x \leq -1$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2 - 1; x \leq -1$$

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$$y: \begin{array}{c} +1 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow -1 \\ y^{-1}: \begin{array}{c} -1 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +1 \end{array} \Rightarrow y^{-1} = -1 - \sqrt{x+1}$$

ابتدا باید ضابطه تابع $y = f(x)$ را پیدا کنیم:

$$fog(x) = (2x-1)g(x) = (2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$$

حالا با فرض $g(x) = 2x+1 = t$ داریم:

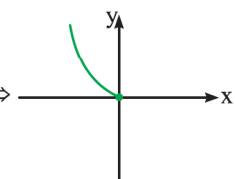
$$x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 1 \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 1 = t^2 - 2t$$

پس $f(x) = x^2 - 2x$ است و طبق گفته صورت سؤال باید ضابطه وارون آن را در $x \leq 1$ پیدا کنیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1; x \leq 1$$

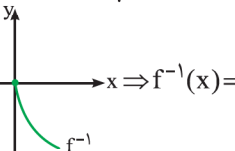
$$f: \begin{array}{c} -1 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow -1 \\ f^{-1}: \begin{array}{c} +1 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +1 \end{array} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$$

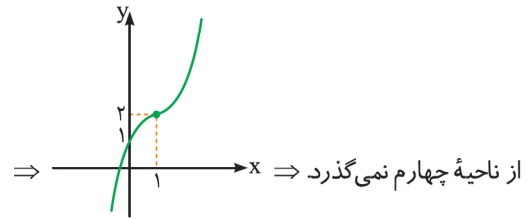
می‌دانیم $f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x|$ است که در بازه $x \leq 0$ نزولی است، پس:

$$x \leq 0: f(x) = -x^3 \Rightarrow$$


$$x \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}; x \geq 0$$

قرینه نسبت به $y=x$





به پوره دیگه! طرح می‌تونست یکم تست رو جذاب تر پیرسه! اینجوری: اگر نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a$ از نقطه $(2, 1)$ بگذرد، ضابطه وارون آن کدام است؟

جواب: $(1, 2) \in f \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-2}$

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 6x = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$$

طول رأس این سهمی برابر $x = -1$ است که در بازه $x \geq -1$ اکیداً صعودی است. حالا ضابطه وارون تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$f: \begin{array}{c} +1 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow +3 \\ f^{-1}: \begin{array}{c} -3 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow -1 \end{array} \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$$

به پوره دیگه! طرح می‌تونه همین تست رو کمی ساده تر پیرسه: «ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$; $x \geq -1$ کدام است؟» یا آگه بفواد راه عددگذاری رو سفت تر کنه، اینجوری پیرسه: «ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$; $x \geq -1$ به صورت $f^{-1}(x) = a + \sqrt{x+b}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟»

مطابق شکل نمودار تابع f در بازه $[3, 7]$ زیرمحور x قرار دارد و محدوده بُرد آن در این بازه به صورت $[-2, 0]$ است:

حالا ضابطه وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f: \begin{array}{c} -3 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow -2 \\ f^{-1}: \begin{array}{c} +2 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow +3 \end{array} \Rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3; -2 \leq x \leq 0$$

نمودار تابع f را در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم است، در نظر می‌گیریم: بُرد تابع در این بازه به صورت $(0, 1)$ است. حالا ضابطه f را ساده می‌کنیم و وارون آن را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1; 0 < x < 1$$

۱۰ به پوره دیگه! طراح می‌تونست از علامت جمع بین x^2 و $\sqrt{x^2}$ استفاده کنه؛ «تابع $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2}$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه کدام است؟»

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + x; & x > 0 \\ x^2 - x; & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y^{-1} = \frac{1}{x} - \sqrt{x + \frac{1}{x}}; x \geq 0$$

۱۱ به پوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه؛ «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ کدام است؟»

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}; x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

۱۲ به پوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم؛ «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ کدام است؟»

$$\text{جواب: } f(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{1}{x} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

۱۳ می‌دانیم اگر $f^{-1}(a) = b$ باشد، آنگاه $f(b) = a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$f(8) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 8 \\ f^{-1}(1) = a(1) + a(\sqrt{1}) = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x} - 1} = \sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} = \sqrt{x} - 1 + 1$$

$$f: (-1) \xrightarrow{\sqrt{}} (+1) \\ f^{-1}: (+1) \xrightarrow{\text{توان ۲}} (-1)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2; x \geq 1$$

۱۴ عددگذاری کنیم! چون $f(5) = 3$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-1}(3) = 5$ باشد. پس گزینه (۱) درست است.

۱۵ به پوره دیگه! آگه طراح رادیکال بیرونی رو نذاره، باز هم برای وارون کردن می‌تونیم از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری بیرسه «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x - 2} + 3$ کدام است؟»

$$\text{جواب: } f(x) = x + 2\sqrt{x - 2} + 3 = (\sqrt{x - 2} + 1)^2 \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2$$

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$1) x \geq 0 \quad 2) \frac{1}{4}x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_f = [4, +\infty)$$

حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{4}x - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - x} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x - 1\right)^2} - 1$$

نحوهٔ تولید تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f: \left(\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{-1} \text{توان ۲} \xrightarrow{-1} \sqrt{}$$

$$f^{-1}: \left(\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{+1} \sqrt{} \xrightarrow{+1} \text{توان ۲}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} + 2$$

سروش سرور میتونیم عددگذاری کنیم! چون $f(4) = 0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 4$ باشد، پس گزینه (۳) درست است.

ضابطهٔ تابع را به صورت $y = |x + 1| - |3x - 6|$ ساده می‌کنیم:

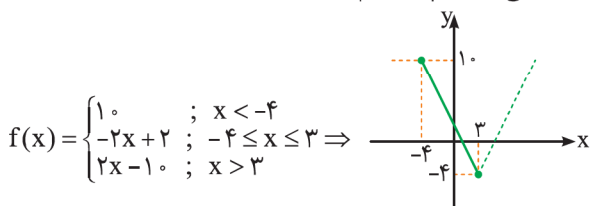
$$y = \begin{cases} 2x - 7; & x \leq -1 \\ 4x - 5; & -1 < x < 2 \\ -2x + 7; & x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{نزولی}} y = -2x + 7; x \geq 2$$

پس ضابطهٔ وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به صورت $y^{-1} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}; x \leq 3$ است.

۱۶ به پوره دیگه! طراح می‌تونست فواستهٔ سوال رو کمی سفت تر کنه و اینجوری بیرسه: «نمودار وارون تابع در بازهٔ نزولی و نمودار تابع $y = x^2 - 3x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به طول $x = -1$ مشترک اند.

برای به دست آوردن وارون توابع قدرمطلق، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک به یک است. برای این منظور تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آنها یک به یک است، تعیین کرده و ضابطهٔ وارون تابع را به دست می‌آوریم.

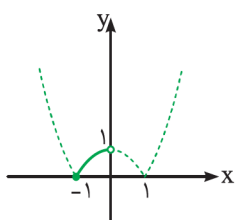
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیدا نزولی برابر $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ است. از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $-4 \leq y \leq 1$ است، پس دامنهٔ تابع f^{-1} در این بازه به صورت $-4 \leq x \leq 1$ است.

۳۹۵

چون $[x] = -1$ است، پس $-1 \leq x < 0$ است. حالا نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ را رسم می‌کنیم:



محدوده برد تابع در بازه مورد نظر برابر بازه $[0, 1)$ است. حالا نحوه تولید تابع $y = -x^2 + 1$ به صورت زیر است:

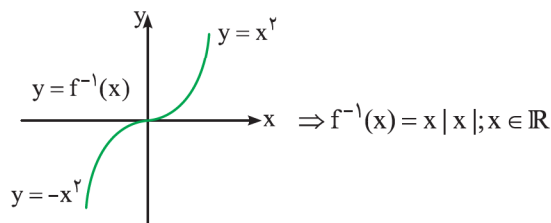
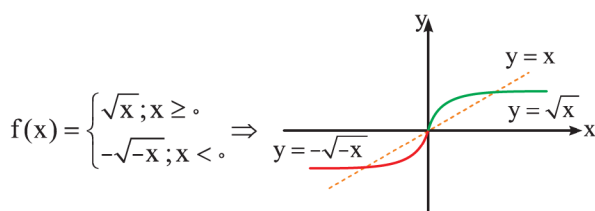
$$y: \text{توان } 2 \rightarrow x(-1) \rightarrow +1$$

$$y^{-1}: \sqrt{} \rightarrow \div(-1) \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$$

۳۹۶

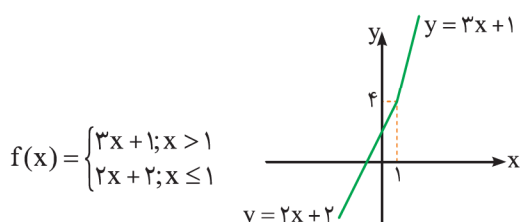
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجه ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:



به پوره دیگه! توی کنکور خارج از کشور سال ۹۲، طرح پرسید: «ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ کدام است؟» برای حل کافیه $|x|$ رو باز کنید که جواب میشه: $f^{-1}(x) = x|x|$

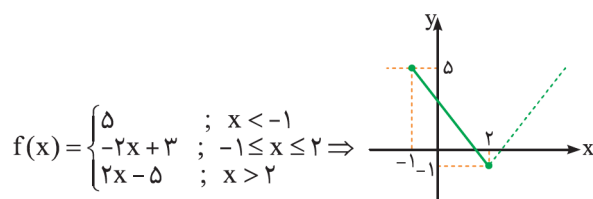
۳۹۷

نمودار تابع f به شکل زیر است:



۳۹۸

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:



ضابطه وارون تابع در بازه اکیدا نزولی برابر ضابطه $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}; -1 \leq x \leq 5$ است. حال طول نقطه برخورد منحنی f^{-1} و g را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

۳۹۹

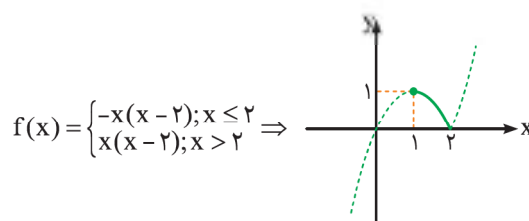
ضابطه $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3 - \sqrt{(x-1)^2} = 3 - |x-1|$$

پس نمودار تابع $f \circ g$ به صورت مقابل است: ضابطه تابع در بازه اکیدا نزولی به صورت $y = -x + 4$ است و چون برد تابع در بازه اکیدا نزولی برابر بازه $(-\infty, 3]$ است، پس ضابطه وارون آن به صورت مقابل است: $y = -x + 4; x \leq 3$

۴۰۰

نمودار تابع $f(x) = x|x-2|$ را رسم می‌کنیم:



ضابطه وارون تابع f در بازه نزولی به صورت زیر است:

$$y = -x(x-2) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1$$

$$y: -1 \rightarrow \text{توان } 2 \rightarrow x-1 \rightarrow +1$$

$$y^{-1}: +1 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow \div(-1) \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$$

برد تابع f در این بازه برابر $0 \leq y \leq 1$ است، پس دامنه f^{-1} نیز برابر $0 \leq x \leq 1$ است.

همگرایی

در توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر صورت و مخرج کسر پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad = bc$ باشد.

۴ ۴۰۳

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. برای این که $f(x)$ را پیدا کنیم باید در تساوی داده شده به جای x عبارت $\frac{x-4}{2}$ قرار دهیم:

$$f\left(2 \times \frac{x-4}{2} + 4\right) = \frac{4 \times \frac{x-4}{2} - 6}{2 \times \frac{x-4}{2} + a} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-14}{x+a-4}$$

چون $f(x) = f^{-1}(x)$ است، پس: $(a-4) + (2) = 0 \Rightarrow a = 2$

۲ ۴۰۳

ابتدا ضابطه $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{f(x) - 3x}{f(x) + 4} \Rightarrow xf(x) + 4x = f(x) - 3x$$

$$\Rightarrow xf(x) - f(x) = -7x \Rightarrow f(x)(x-1) = -7x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-7x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x+7}$$

۲ ۴۰۴

چون مخرج کسر بزرگ‌تر از صورت کسر است و هم‌چنین علامت آن

همواره مثبت است، پس $1 < \frac{x}{1+|x|} < -1$ است. یعنی محدوده بُرد

تابع f به صورت $(-1, 1)$ است. حالا ضابطه وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}; & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1}; & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق وارون هموگرافیک}} f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x-1}; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{-x-1}; & -1 < x < 0 \end{cases}$$

می‌توانیم ضابطه f^{-1} را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x}; & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}; \quad \frac{-1 < x < 1}{|x| < 1}$$

با مقایسه ضابطه f^{-1} با صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم $a = 1$ و $b = 1$ است و $a \times b = 1$ است.

۴ ۴۰۵

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4; \quad x \geq 1$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f: (-1) \rightarrow 2 \text{ توان } \rightarrow -4$$

$$f^{-1}: (+1) \leftarrow +\sqrt{\quad} \leftarrow +4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

حالا نقاط تلاقی نمودارهای f^{-1} و g را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کزینها}} x = 21$$

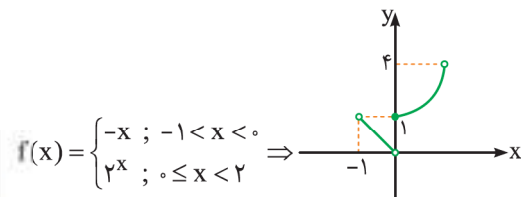
حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطه وارون تابع به شکل زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1); & x > 4 \\ \frac{x}{2} - 1; & x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = f^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right) = f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

۲ ۳۹۸

بتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطه بالایی، وقتی $-1 < x < 0$ است، پس $[x] = -1$ می‌باشد:



$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; & -1 < x < 0 \\ \log_2 x; & 0 <= x < 2 \end{cases}$$

۲ ۳۹۹

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{3x+2+2x-2}{x-1} = \frac{5x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-5}$$

اگر مخرج مشترک نمی‌گرفتی، گزینه (۳) رو میزدی که غلطه!

همگرایی

اگر تابع کسری $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک به یک باشد:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۴ ۴۰۰

چون $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{bx+4}$ است، پس $f(x) = \frac{-4x-3}{bx-5}$ است. حالا

چون بُرد f برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس:

$$\frac{-4}{b} = -2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{-4x-3}{2x-5}$$

از طرفی دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{a\}$ است، پس:

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow ab = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

۴ ۴۰۱

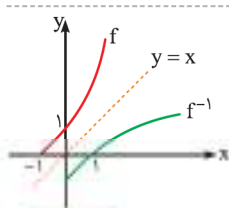
$$f(f(x)) = \frac{af(x)+1}{2f(x)-1} \Rightarrow f(x) = \frac{ax+1}{2x-1}$$

از طرفی چون $f^{-1}(0) = -2$ است، پس $f(-2) = 0$ است:

$$f(-2) = \frac{-2a+1}{-4-1} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

پس $g(x) = \frac{4x+1}{2x+\frac{1}{5}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخرج

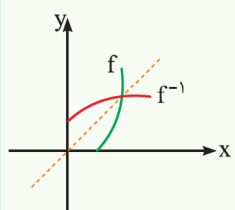
آن است، پس تابع g وارون پذیر نیست.



نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ با دامنه $(-1, +\infty)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد و هیچ نقطه تلاقی با آن ندارد، پس f و f^{-1} همدیگر را قطع نمی‌کنند.

تقاطع

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1} ، راهکار کلی این است که ضابطه f^{-1} را به دست آوریم و سپس معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل کنیم.



در توابع اکیدا صعودی و توابع هموگرافیک نقاط برخورد f و f^{-1} در صورت وجود، همان نقاط برخورد f و f^{-1} است. پس در این توابع معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم.

در توابع اکیدا نزولی، می‌توانیم برای پیدا کردن محل تلاقی f و f^{-1} از رسم نمودار استفاده کنیم.

تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ یک تابع اکیدا صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - 1 &= x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{y=x}{x} \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

پس فاصله نقطه $M(1, 1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x-2} &= x \Rightarrow x+4 = x^2 - 2x \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

تابع $f(x) = x^3 + 3x - 12$ از جمع دو تابع اکیدا صعودی $y = x^3$ و $y = 3x - 12$ به دست آمده، پس اکیدا صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

$\Rightarrow OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

به دوره دیگه! فاصله نقطه تقاطع تابع $f(x) = 2x - 3 + \sqrt{x-1}$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟
پوآب: $2\sqrt{3}$

ابتدا نقطه برخورد f و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 3x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع ضرایب برابر صفر} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{y=3x-4}{x} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(1, -1) \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

چون دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(1, -1)$ متقاطع‌اند، پس دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(1, -1)$ متقاطع‌اند.

تقاطع

اگر دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(a, b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(b, a)$ متقاطع‌اند.

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3; x \geq 2$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f: -2 \rightarrow \text{توان } 2 \rightarrow -3$$

$$f^{-1}: +3 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3}$$

حالا نقاط تقاطع توابع $y = \sqrt{f(x)+3}$ و $y = 1 - f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

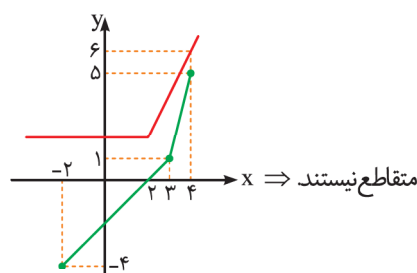
$$\begin{aligned} 1 - f^{-1}(x) &= \sqrt{f(x)+3} \Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 = \sqrt{(x-2)^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 &= |x-2| \xrightarrow{x \leq 2} \sqrt{x+3} - 1 = -(x-2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = -x+3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \xrightarrow{y=|x-2|} y = 1$$

$$\Rightarrow A(1, 1) \Rightarrow |OA| = \sqrt{2}$$

با توجه به شکل صورت سؤال، سه نقطه $A(-4, -2)$ ، $B(1, 3)$ و $C(5, 4)$ روی نمودار تابع f قرار دارند، پس سه نقطه $A'(-2, -4)$ و $B'(3, 1)$ و $C'(4, 5)$ روی نمودار تابع f^{-1} هستند.

حالا با کمک سه نقطه A' و B' و C' نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودار تابع قدرمطلق $g(x) = x + |x-2|$ داریم:



مثال ۱

اگر تابع $f(x)$ وارون پذیر باشد، ترکیب این تابع با وارونش، همواره برابر با x است. از طرفی با توجه به دامنه توابع f و f^{-1} ، با حالت های زیر مواجه می شویم:

۱) در تابع $f^{-1} \circ f$ ، چون x ابتدا وارد تابع f می شود، پس x باید عضو دامنه f باشد:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f$$

۲) در تابع $f \circ f^{-1}$ ، چون x ابتدا وارون تابع f^{-1} می شود، پس x باید عضو دامنه f^{-1} باشد:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x; x \in D_{f^{-1}}$$

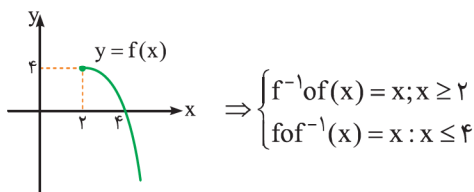
مثال ۲

برای این که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه های (۱) و (۴) به صورت بازه $[2, +\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینه (۳) برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است. اما در گزینه (۲) دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن برابر $(1, +\infty)$ است.

مثال ۳

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 4x - x^2; x \geq 2$ را رسم می کنیم: دامنه تابع f برابر بازه $[2, +\infty)$ و برد آن بازه $(-\infty, 4]$ است.

پس:



$$\Rightarrow y = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x) = x + x = 2x; 2 \leq x \leq 4$$

که نمودار این تابع در گزینه (۳) آمده است.

مثال ۴

برای پیدا کردن $g(3)$ ، باید در تساوی داده شده به جای x عدد ۹ بگذاریم:

$$f^{-1}(3x+1) = g\left(\frac{x+3}{4}\right) \xrightarrow{x=9} f^{-1}(28) = g(3)$$

$$\Rightarrow f(g(3)) = f(f^{-1}(28)) = 28$$

مثال ۲

تابع $y = \log_4(2^{x+2} + 32)$ از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی $f(x) = \log_4 x$ و $g(x) = 2^{x+2} + 32$ به دست آمده (تابع $f \circ g$) پس اکیداً صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطه برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_4(2^{x+2} + 32) = x \Rightarrow 4^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow (2^x)^2 - 4 \times (2^x) - 32 = 0$$

$$\xrightarrow{2^x=t} t^2 - 4t - 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 8 \end{cases} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

پس $A(3, 3)$ است و فاصله آن از نقطه $O(0, 0)$ برابر $OA = 3\sqrt{2}$ است.

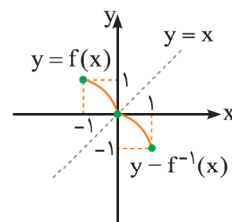
مثال ۴

ابتدا دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ را به دست می آوریم:

$$1) 1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$2) 1-\sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \leq 1 \Rightarrow 1+x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$$

از اشتراک بازه های (۱) و (۲) دامنه تابع f برابر بازه $[-1, 0]$ به دست می آید. حالا می دانیم تابع $y = \sqrt{1+x}$ اکیداً صعودی است، پس $y = -\sqrt{1+x}$ اکیداً نزولی و $y = 1 - \sqrt{1+x}$ نیز اکیداً نزولی است. از طرفی می دانیم تابع f از ترکیب تابع اکیداً نزولی $y = 1 - \sqrt{1+x}$ و تابع اکیداً صعودی $\sqrt{x}$ به دست می آید. پس تابع f یک تابع اکیداً نزولی است. حالا یک تابع اکیداً نزولی در بازه $[-1, 0]$ رسم می کنیم و برای رسم کردن وارون آن، نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می کنیم:



پس دو تابع f و f^{-1} فقط در $x = 0$ متقاطع اند.

مثال ۴

دامنه تابع f به صورت بازه $[1, +\infty)$ و برد تابع f برابر بازه $(-\infty, 4]$ است.

در ضمن می دانیم $f^{-1} \circ f(x) = x; x \in D_f$ و $f \circ f^{-1}(x) = x; x \in R_f$ است. حالا چون $x = 3$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $f \circ f^{-1}(3)$ تعریف نشده است.

۴ ۴۴۲

می‌دانیم $(f^{-1} \circ g)^{-1}(2) = g^{-1}(f(2))$ است. درضمن با توجه به ضابطه
 f واضح است که $f(2) = 2^3 + 2 = 10$ است. پس $g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(10)$ است. حالا برای پیدا کردن $g^{-1}(10)$ کافی است، ضابطه g را برابر ۱۰ قرار

دهیم:

$$\frac{1-x}{x+2} = 10 \Rightarrow 1-x = 10 \cdot x + 20 \Rightarrow 11x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{11}$$

توجه

برای به دست آوردن تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ با داشتن توابع f و g ، می‌توانیم
 تابع $g \circ f$ را به دست آوریم و سپس آن را وارون کنیم، یعنی:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

۴ ۴۴۳

می‌دانیم $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ است. پس می‌توانیم تابع
 $f \circ g$ را پیدا کنیم و سپس آن را وارون کنیم:

$$f(g(x)) = -5 + \frac{1}{\frac{x+3}{x+2} - 1} = -5 + \frac{1}{\frac{1}{x+2}} = x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x + 3$$

۲ ۴۴۴

تابع $(f \circ g)(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ را وارون می‌کنیم:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-x+1}{x-3} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{-x+1}{x-3}$$

$$\xrightarrow{x=4} g^{-1}(f^{-1}(4)) = \frac{-4+1}{4-3} = -3 \Rightarrow g^{-1}(1) = -3$$

۲ ۴۴۵

باقی‌مانده تقسیم $P(x) = ax^2 + x - 7$ بر $x - 2$ برابر $P(2)$ و باقی‌مانده
 تقسیم $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 3$ بر $x - 2$ برابر $f(2)$ است:

$$P(2) = a(2)^2 + 2 - 7 = 4a - 5$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 2^2 + 2a + 3 = 16 - 4 + 2a + 3 = 2a + 15$$

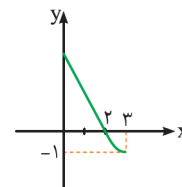
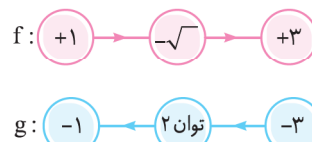
حال چون باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ و $f(x)$ بر $x - 2$ یکسان است،

بنابراین:

$$P(2) = f(2) \Rightarrow 4a - 5 = 2a + 15 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$$

۳ ۴۴۶

چون ترکیب دو تابع f و g برابر x یعنی تابع همانی است، پس دو تابع f
 و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x) = f^{-1}(x)$ است. حالا نمودار
 تابع f و وارون آن را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow g(x) = (x - 3)^2 - 1; x \leq 3$$

به پوره دیگه! طرح به پای این که f و g رو به شکل ماشین نمایش بده،
 می‌تونست بگه اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی
 باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

۲ ۴۴۷

چون در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ رابطه $a + d = 0$ برقرار است، پس
 $f(x) = f^{-1}(x)$ است، بنابراین:

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(f^{-1}(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2})$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

به پوره دیگه! یادش بگیر در کتاب میکرو طبقه‌بندی ریاضی سال ۹۹ و قبل از
 این که سرکله این تیپ سوال در کنگورها پیدا بشه، این تست رو آورده بودم:
 اگر $f(x) = \frac{2x+1}{5x-2}$ باشد، حاصل $f \circ f(\sqrt{5})$ کدام است؟ جواب: $\sqrt{5}$

۴ ۴۴۸

تابع $f(x) = x + \sqrt{x} + 3$ از جمع دو تابع اکیدا صعودی $y = x + 3$ و
 $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. پس تابعی اکیدا صعودی
 است که دامنه آن برابر $[0, +\infty)$ و بُرد آن $[3, +\infty)$ است. درضمن
 می‌دانیم $f \circ f^{-1}(x) = x; x \geq 3$ است. حالا نقطه برخورد این تابع
 را با $y = \sqrt{-x+6}$ پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{-x+6} = x \Rightarrow -x+6 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

هر دو مقدار x به دست آمده در دامنه تابع $f \circ f^{-1}(x)$ وجود ندارد، پس
 این دو تابع متقاطع نیستند.

حال چون $f(x)$ بر $x - 3$ بخش پذیر است، پس باید $f(3) = 0$ باشد:

$$f(3) = 0 \Rightarrow (3^2 + 5)(3 - 8) + a = 14 \times (-5) + a$$

$$= -70 + a = 0 \Rightarrow a = 70.$$

۴ ۴۳۵

به دنبال باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ ، یعنی $P(-2)$ هستیم. به همین دلیل در معادله $P(x) = 2P(-x) + 4x$ به جای x عدد

-2 را قرار می دهیم. پس داریم:

$$x = -2: P(-2) = 2P(2) - 8 \quad (I)$$

و برای پیدا کردن $P(-2)$ ، در معادله بالا $x = 2$ را جای گذاری می کنیم:

$$x = 2: P(2) = 2P(-2) + 8 \quad (II)$$

از حل دستگاه شامل معادلات (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} P(2) = 2P(-2) + 8 \\ P(-2) = 2P(2) - 8 \end{cases} \Rightarrow P(-2) = 2(2P(-2) + 8) - 8 - 8$$

$$\Rightarrow P(-2) = 4P(-2) + 16 - 8 \Rightarrow 3P(-2) = -8 \Rightarrow P(-2) = -\frac{8}{3}$$

❗ به پوره دیکه! طراح در کنکور ۹۹ مشابه این تست رو این پوری پرسید:

«فرض کنید چند جمله ای $P(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$ آن گاه باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$

کدام است؟»

پوآب: صفر

۱ ۴۳۱

چون باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس:

$$P(4) = 3, P(-2) = 1$$

حال باقی مانده تقسیم $P(x^2) + 4P(-x)$ بر $x - 2$ برابر است با:

$$P(2^2) + 4P(-2) = P(4) + 4P(-2) = 3 + 4(1) = 7$$

۱ ۴۳۲

برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم عبارت $P(x^2 + 1) + 3P(1 - x)$ بر

$x + 1$ ، باید در عبارت، $x = -1$ را جای گذاری کنیم:

$$P((-1)^2 + 1) + 3P(1 - (-1)) = P(2) + 3P(2) = 4P(2)$$

اکنون حاصل $P(2)$ را به دست می آوریم:

$$P(2) = (2)^3 + m(2)^2 + (3m - 2)(2) - 1 \cdot m - 4$$

$$= 8 + 4m + 6m - 4 - 1 \cdot m - 4 = 0$$

بنابراین باقی مانده تقسیم عبارت $P(x^2 + 1) + 3P(1 - x)$ بر $x + 1$

برابر است با:

$$4P(2) = 4 \times 0 = 0$$

تقسیم

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه تساوی زیر برقرار باشد [این تساوی را اتحاد تقسیم می نامند]:

$$\begin{array}{l} f(x) \\ \vdots \\ q(x) \end{array} \begin{array}{l} p(x) \\ \vdots \\ r(x) \end{array} \rightarrow f(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$$

توجه کنید در اتحاد تقسیم، درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر است.

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - a$

باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر با $f(-\frac{b}{a})$ است.

مثلاً باقی مانده تقسیم عبارت $x^4 - 3x^3 + x + 9$ بر $x - 2$ برابر است با:

$$\begin{aligned} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow r = f(2) \\ = 2^4 - 3 \times 2^3 + 2 + 9 = 16 - 24 + 2 + 9 = 3 \end{aligned}$$

۱ ۴۳۶

ابتدا ریشه عبارت $x + 2$ را به دست می آوریم: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

اگر $f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، $f(-2) = 0$ است.

$$f(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^3 + a(-2) + 5 = 0 \Rightarrow -2a = 3$$

$$\Rightarrow a = \frac{-3}{2} = -1.5$$

۱ ۴۳۷

چند جمله ای $P(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر است، پس:

$$P(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 2(\frac{1}{2})^4 + a(\frac{1}{2})^3 + 2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a+1}{8} = 1 \Rightarrow a = 7$$

اکنون باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ را محاسبه می کنیم:

$$P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2)$$

$$= 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

۲ ۴۳۸

می دانیم اگر $P(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد، آنگاه $P(1) = 0$ بنابراین:

$$P(1) = (1)^3 - 3a(1) - 7 = 0 \Rightarrow a = -2$$

پس ضابطه $P(x)$ به صورت مقابل است: $P(x) = x^3 + 6x - 7$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ کافی است $P(-2)$ را محاسبه کنیم:

$$P(-2) = (-2)^3 + 6(-2) - 7 = -8 - 12 - 7 = -27$$

۳ ۴۳۹

فرض می کنیم با اضافه کردن عدد a به حاصل ضرب $x^2 + 5$ و $x - 8$ حاصل بر $x - 3$ بخش پذیر می شود، پس:

$$f(x) = (x^2 + 5)(x - 8) + a$$

پس $P(x)$ به صورت $x^3 + 2x^2 + x + 2$ است. با تقسیم $P(x)$ بر

$$x-1 \text{ داریم: } x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x-1) \underbrace{(x^2 + 3x + 4)}_{Q(x)} + 6$$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x-1) + Q(\frac{x}{x-1})$ بر $x-2$ مقدار $x=2$ را جای گذاری می کنیم.

$$\xrightarrow{x=2} P(1) + Q(1) = 6 + 8 = 14$$

۲ ۴۳۷

چون $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ بر $x+2$ بخش پذیر است، پس $P(-2) = 0$ است و داریم:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0$$

$$\Rightarrow -2 \times (-2)^{2n} + 2(-2)^{2n} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

باقی مانده تقسیم این چند جمله ای بر $x-1$ برابر $P(1)$ است:

$$P(1) = (1)^{2n+1} + 2(1)^{2n} + 1^5 - 5(1)^3 - 8 = 1 + 2 + 1 - 5 - 8 = -9$$

۳ ۴۳۸

چون تابع $P(x)$ یک چند جمله ای است، باید توان های متغیرهای آن،

اعداد حسابی (W) باشد، داریم:

$$1) (n-3) \in W \Rightarrow n-3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$$

$$2) \frac{2n+3}{n} \in W \Rightarrow (\frac{2n}{n} + \frac{3}{n}) \in W \Rightarrow (2 + \frac{3}{n}) \in W \Rightarrow \begin{cases} n=1 \times \\ n=3 \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تابع $P(x)$ به صورت $x^3 + x^3 - 2 + 1 + 3$ برابر $P(x)$ است.

باقی مانده تقسیم این عبارت بر $2x-1$ را پیدا می کنیم:

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, P(x)=2x^3+2$$

$$P(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^3+2=2(\frac{1}{8})+2=2\frac{1}{4}$$

۱ ۴۳۹

چون $P(x)$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش پذیر است، پس

$$\text{فرض می کنیم } n=1 \text{ باشد: } P(x) = x^4 + 2x^3 + x^6 + 3x^5 + 16a$$

$$\xrightarrow{P(-2)=0} -32 + 16a = 0 \Rightarrow a = 2$$

حال باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر x^2+2x-3 را به صورت $ax+b$ در

نظر می گیریم و با اتحاد تقسیم داریم:

$$x^4 + 2x^3 + x^6 + 3x^5 + 32 = \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{(x-1)(x+3)} Q(x) + ax + b$$

$$1) P(1) = 39 = a + b$$

$$\Rightarrow a = -5, b = 44$$

$$2) P(-3) = 59 = -3a + b$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده: } -5x + 44$$

۲ ۴۳۵

در این سؤال $x^2+1=0$ ریشه ندارد. ولی می توان نتیجه گرفت که $x^2=-1$ است.

حال در ضابطه $f(x)$ داریم:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$$

در حوزه اعداد فراتر از $\mathbb{R}$ عبارت $\sqrt{-1}$ نیز تعریف شده است. این

حوزه اعداد مختلط نام دارد و آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می دهند. پس عبارت

$x^2=-1$ در حوزه اعداد مختلط تعریف شده است.

ملاحظات

در محاسبه باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر عبارتی مانند $P(x)$ که

$P(x)$ ریشه ندارد، می توانیم $P(x)=0$ قرار دهیم و با نتایج این

کار بازی کنیم تا در $f(x)$ قرار دهیم. عبارتی که به دست می آوریم

همان باقی مانده است.

۴ ۴۳۶

اتحاد تقسیم را می نویسیم و در آن $x=1$ و $x=-1$ می گذاریم:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)Q(x) + x + 2$$

$$1) f(1) = 1 + 4 + 5 = 10 = Q(1) + 3 \Rightarrow Q(1) = 1$$

$$2) f(-1) = 2Q(-1) + 1 = 11 \Rightarrow Q(-1) = 5$$

با توجه به گزینه ها، فقط $Q(x) = -2x + 3$ مناسب است.

۴ ۴۳۵

ابتدا باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ را محاسبه می کنیم:

$$f(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^5 + (-2)^2 + 1 = 16 + 128 + 4 + 1 = 149$$

حال اتحاد تقسیم را نوشته و از آن جایی که باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر

$x-1$ برابر $q(1)$ است، در اتحاد تقسیم $x=1$ را قرار می دهیم:

$$\text{اتحاد تقسیم: } x^4 - 4x^5 + x^2 + 1 = (x+2)q(x) + 5$$

$$\xrightarrow{x=1} 1 - 4 + 1 + 1 = (1+2)q(1) + 5 \Rightarrow -6 = 3q(1) \Rightarrow q(1) = -2$$

۲ ۴۳۴

چون $P(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر است، پس $P(-2) = 0$ است.

$$P(-2) = -8 + 4a - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 10 \quad (1)$$

و باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۶ است، پس $P(1) = 6$ است.

$$P(1) = 1 + a + 1 + b = 6 \Rightarrow a + b = 4 \quad (2)$$

با معادله (۱) و (۲) در دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 4a + b = 10 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

۴۴۵

با توجه به نمایش تقسیم داریم:

$$P(x) = (x^2 - 3x - 4)q(x) + (3x - 4) \\ \Rightarrow P(x) = (x+1)(x-4)q(x) + (3x-4) \Rightarrow \begin{cases} P(-1) = -7 \\ P(4) = 8 \end{cases}$$

 باقی مانده تقسیم $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر $P(-1) = -7$ ، $P(-2+1) = P(-1) = -7$ است.

مثال ۲

 باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر مقسوم علیه درجه دوم (یا بالاتر)

برای محاسبه باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر یک عبارت درجه دوم (یا با درجه بالاتر) راهکار کلی این است که ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار دهیم. سپس در مقسوم علیه، جمله با درجه بیشتر را بر حسب سایر جملات به دست آورده و آن را در $f(x)$ قرار می دهیم. این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که درجه عبارت $f(x)$ کم تر از درجه مقسوم علیه شود. عبارت به دست آمده، همان باقی مانده است. [این روش به روش کاهش توان مشهور است].

مثلاً برای محاسبه باقی مانده عبارت $f(x) = 2x^3 + 5x - 9$ بر $x^2 - x$ ، مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم و داریم:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 2x + 5x - 9 = 7x - 9$$

 بنابراین باقی مانده $7x - 9$ است.

برای محاسبه باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر یک عبارت درجه دوم (یا با درجه بالاتر) اگر مقسوم علیه قابل تجزیه به عوامل درجه اول باشد، با جای گذاری ریشه های عوامل مقسوم علیه در اتحاد تقسیم، باقی مانده را به دست می آوریم.

اگر مقسوم علیه، یک عبارت درجه دوم باشد، باقی مانده حداکثر از درجه اول خواهد بود پس باید باقی مانده را به صورت $ax + b$ در نظر بگیریم.

۴۴۶

 مقسوم علیه را به صورت $(x-1)(x+1)$ می نویسیم و با کمک اتحاد

 تقسیم داریم: $ax^3 + bx^2 + 2x + 1 = (x-1)(x+1)q(x) + x + 2$

$$x=1: a+b+3=0+3 \Rightarrow a+b=0$$

$$x=-1: -a+b-1=0+1 \Rightarrow -a+b=2$$

 حال باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ را به دست می آوریم:

$$f(-2) = -8a + 4b - 4 + 1 = -8(-1) + 4(1) - 3 = 9$$

۴۴۷

 با توجه به اتحاد تقسیم داریم: $P(x) = (x^2 - x)Q(x) + x + 4$

$$\Rightarrow P(x) = x(x-1)Q(x) + x + 4 \Rightarrow \begin{cases} P(0) = 4 \\ P(1) = 5 \end{cases}$$

 با جای گذاری در $P(x)$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (0)^4 + a(0)^2 + 3(0) + b = 4 \Rightarrow b = 4 \\ (1)^4 + a(1)^2 + 3(1) + 4 = 5 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

بنابراین $P(x) = x^4 - 3x^2 + 3x + 4$ و خارج قسمت آن در تقسیم بر $x^2 - x$ برابر $Q(x) = x^2 + x - 2$ است.

 باقی مانده تقسیم $P(x) + Q(x+1)$ بر $x-1$ برابر است با:

$$\xrightarrow{x=1} 4P(1) + Q(2) = 4(5) + ((2)^2 + 2 - 2) = 20 + 4 = 24$$

۴۴۸

با توجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$P(x+2) = (2x^2 - 3x - 1)Q(x)$$

وقتی باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x+1$ برابر ۲ می شود، یعنی $Q(-1) = 2$ است. اکنون برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ ، کافی است در $P(x+2)$ ، جای x عدد -1 را قرار دهیم که به $P(1)$ برسیم.

$$x = -1: P(-1+2) = (2(-1)^2 - 3(-1) - 1)Q(-1)$$

$$\Rightarrow P(1) = (2+3-1)Q(-1) = 4Q(-1) = 4 \times 2 = 8$$

۴۴۹

با توجه به اتحاد تقسیم $P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$ است، پس مشتق آن برابر است با:

$$P'(x) = (2x+2)Q(x) + Q'(x)(x^2+2x) + 3$$

باقی مانده تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$ برابر $P'(-2)$ است:

$$P'(-2) = -2Q(-2) + Q'(-2) \times 0 + 3 = -3$$

۴۵۰

با فرض $P(x) = ax^2 + bx + c$ نتیجه می گیریم $P'(x) = 2ax + b$ است، پس با توجه به اتحاد تقسیم خواهیم داشت:

$$P(x) = P'(x)\left(\frac{1}{2}x+1\right) + (-2)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax+b)\left(\frac{1}{2}x+1\right) - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{b}{2}\right)x + b - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + \frac{b}{2} = b \Rightarrow 2a = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 4a \\ c = b - 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a,b,c \in \mathbb{N}} \begin{cases} a=1, c=2, b=4 \\ \text{یا} \\ a=2, c=6, b=8 \end{cases}$$

پس $a+b+c$ می تواند برابر ۷ یا ۱۶ باشد که کمترین مقدار آن برابر ۷ است.

۴۵۱

در این سؤال $f(x)$ بر $(x-2)^2$ $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ بخش پذیر است. بنابراین:

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16+4a+2b+2=0 \\ 6x^2+2ax+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-9 \\ 4a+b=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7/5 \\ b=6 \end{cases}$$

بنابراین $2a+3b = -14+18 = 4$ است.

مثال ۳

اگر عبارت چند جمله ای $f(x)$ ، بر یک عبارت مربع کامل مانند $(x-a)^2$ بخش پذیر باشد، آن گاه هر دو شرط زیر برقرار است:

$$f'(a) = 0 \quad (۲) \quad f(a) = 0 \quad (۱)$$

به ازای $x = -1$ عبارت تعریف نشده است. پس می‌توان به جای محاسبه $Q(-1)$ از $\lim_{x \rightarrow -1} Q(x)$ استفاده کرد:

$$\lim_{x \rightarrow -1} Q(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^9 + 1}{x + 1} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^8}{1} = 9(-1)^8 = 9$$

۱ ۴۵۴

با توجه به این که چند جمله‌ای $x^6 - 64$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، پس اتحاد تقسیم به صورت $x^6 - 64 = (x + 2)Q(x)$ است که از آن نتیجه

$$\text{می‌گیریم } Q(x) = \frac{x^6 - 64}{x + 2}$$

از راه حل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} Q(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - 64}{x + 2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x^5}{1} = 6(-2)^5 = -192$$

۴ ۴۵۵

اتحاد تقسیم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 - x^{14} = (x^2 + x + 1)Q(x) + r(x)$$

حالا طرفین این تساوی را در $(x - 1)$ ضرب می‌کنیم و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\frac{x(x-1)}{x(x-1)} \rightarrow (x-1)(2-x^{14}) = (x^2+x+1)Q(x)(x-1) + (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow (x-1)(2-x^{14}) = (x^3-1)Q(x) + (x-1)r(x)$$

حالا مقسوم علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \xrightarrow{\text{به توان ۴}} x^{12} = 1 \xrightarrow{\times x^2} x^{14} = x^2$$

پس در اتحاد تقسیم به جای x^3 عدد ۱ و به جای x^{14} عبارت x^2 را قرار می‌دهیم:

$$(x-1)(2-x^2) = (1-1)Q(x) + (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow (x-1)(2-x^2) = (x-1)r(x) \Rightarrow r(x) = 2-x^2$$

حالا مقسوم علیه یعنی $x^2 + x + 1$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 1$$

$$\Rightarrow r(x) = 2 - x^2 = 2 - (-x - 1) = x + 3$$

در نتیجه $r(x) = x + 3$ است و مجموع ضرایب آن برابر ۴ است.

۱ ۴۵۶

عبارت $q(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$q(x) = x^2(x^2 + 3x + 2) = x^2(x+2)(x+1)$$

چون دوجمله‌ای $x^3 + x^2$ بزرگ‌ترین عامل مشترک عبارت است، پس باید عبارات $x^2(x+1) = x^3 + x^2$ باشد، چرا که عبارت $x^3 + 2x^2$

نوشته می‌شود که به دلیل وجود ضریب ۲، با ساختار به صورت $x^3 + x^2$ داده شده، انطباق ندارد. با مقایسه $x^3 + x^2$ و $x^3 + x^2$

متوجه می‌شویم $n = 2$.

از طرفی چون $x^2(x+1)$ عامل $p(x)$ نیز هست، پس $p(-1) = 0$ است.

$$p(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^5 + a(-1)^3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$2 \times -1 = -2$$

برای محاسبه na داریم:

۱ ۴۴۷

از آنجا که باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)^2$ برابر با $3x+1$ است، نتیجه می‌گیریم که $f(x) - 3x - 1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است. در نتیجه تابع $g(x) = x^3 + ax^2 + (b-3)x + 5$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است:

$$\begin{cases} g(1) = 0 \\ g'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + (b-3) + 5 = 0 \\ (3x^2 + 2a) + (b-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 3, b = -6$$

بنابراین $\frac{b}{a} = -2$ است.

۱ ۴۴۸

با توجه به این که عبارت $a^n - b^n$ بر $a - b$ بخش پذیر است. پس $(x^2 + x^2 + 1)^9 - (x^2 + x^2 + 1) = x^2 - 1$ بر $(x^2 + x^2 + 1)^9 - (x^2 + x^2 + 1)$ بخش پذیر است. بنابراین عبارت مورد نظر برگزیده‌ای که شامل $x^2 - 1$ یا هر کدام از عامل‌های آن یعنی $x+1$ یا $x-1$ است بخش پذیر است. اما بر $x^2 + 1$ بخش پذیر نیست.

۲ ۴۴۹

با توجه به این که $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ است، در سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2}{x^7 - 1} - \frac{x-1}{(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x-1)} = \frac{2 - (x-1)}{x^7 - 1} = \frac{3-x}{x^7 - 1}$$

با مقایسه عبارت به دست آمده با سمت راست تساوی نتیجه می‌گیریم:

$$P(x) = 3 - x$$

۴ ۴۵۰

می‌دانیم عبارت $x^n + a^n$ وقتی بر $x + a$ بخش پذیر است که n فرد باشد. بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1) \quad x^{20} + 1 = (x^2)^{10} + 1 \rightarrow n = 10 \quad \times \text{ زوج است.}$$

$$2) \quad x^{20} + 1 = (x^{10})^2 + 1 \rightarrow n = 2 \quad \times \text{زوج است.}$$

$$3) \quad x^{20} + 1 = (x^5)^4 + 1 \rightarrow n = 4 \quad \times \text{زوج است.}$$

$$4) \quad x^{20} + 1 = (x^4)^5 + 1 \rightarrow n = 5 \quad \checkmark \text{ فرد است.}$$

۳ ۴۵۱

با توجه به این که عبارت $a^n - b^n$ همواره بر $a - b$ بخش پذیر است، پس $x^{15} - 1$ نیز برای $x - 1$ بخش پذیر است، اما این عبارت در گزینه‌ها نیست، از طرفی چون $x^{15} - 1 = (x^3)^5 - (1)^5$ ، پس این عبارت بر $x^3 - 1$ و عامل‌های آن نیز بخش پذیر است. با تجزیه $x^3 - 1$ داریم:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

پس $x^{15} - 1$ بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است.

۴ ۴۵۲

$a^n - b^n$ فقط زمانی بر $x + a$ بخش پذیر است که n زوج باشد.

۴ ۴۵۳

می‌دانیم $x^9 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است. حال با توجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$x^9 + 1 = (x+1)Q(x) \Rightarrow Q(x) = \frac{x^9 + 1}{x+1}$$